
Math
Math
مذكرة الجبر
الصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى
منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

المصفــــــــــــوفات

تعريف المصفوفة :

هي طريقة تنظيم للبيانات أو المعلومات في شكل صفوف (أفقية) وأعمدة (رأسية) توضع بين قوسين من النوع ( )

نظم المصفوفة :

إذا كان عدد صفوف المصفوفة = م ، عدد الأعمدة = ن

تكون المصفوفة علي النظم م × ن

فمثلاً :

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٧ \\ ١ & ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

المصفوفة أ علي النظم ٢ × ٣ ، المصفوفة س علي النظم ٢ × ٢ ، ص علي النظم ١ × ٣

تسمية المصفوفة : نرمز للمصفوفة بأي حرف كبير (أ ، س ، ص ، ٠٠٠٠)

مثـــــال ١ محلان لبيع الأدوات الكهربية في أحد الأيام باع المحل الأول ٥ خلاطات ، ٦ مراوح ، ٣ ثلاجات و باع المحل الثاني ٤ خلاطات ، ٩ مراوح ، ٣ ثلاجات أكتب مصفوفة المبيعات س علي النظم ٢×٣

الحـــــــل

	خلاطات	مراوح	ثلاجات
المحل الأول	٥	٦	٣
المحل الثانى	٤	٩	٣

وتكون المصفوفة كالآتى :

$$س = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ٤ \end{pmatrix}$$

****

مثـــ٢ـــال : إذا كان أحد المصانع له فرعان وينتج ثلاث أنواع من السلع (تليفزيون – غسالة – ثلاجة) وكان الفرع س ينتج ٥٠ تليفزيون ، ٤٠ غسالة ، ٣٥ ثلاجة والفرع ص ينتج ٧٠ تليفزيون٣٠ غسالة ، ٢٥ ثلاجة أكتب أنتاج هذا المصنع على شكل مصفوفة بطريقتين

الحـــــــل

أولا نكون جدول لبيانات هذا المصنع ويمكن ذلك بطريقتين

الطريقة الاولى :-

	تليفزيون	غسالة	ثلاجة
الفرع س	٥٠	٤٠	٣٥
الفرع ص	٧٠	٣٠	٢٥

$$ا = \begin{pmatrix} ٥٠ & ٤٠ & ٣٥ \\ ٧٠ & ٣٠ & ٢٥ \end{pmatrix}$$

الطريقة الثانية :-

	الفرع س	الفرع ص
تليفزيون	٥٠	٧٠
غسالة	٤٠	٣٠
ثلاجة	٣٥	٢٥

$$ا = \begin{pmatrix} ٣٠ & ٤٠ \\ ٥٠ & ٦٠ \\ ٧٠ & ٨٠ \end{pmatrix}$$

****

موقع العناصر في المصفوفة :

.في المصفوفة ا يكون العنصر ($ا_{ص ع}$) هو العنصر الذي يقع في الصف ص ، العمود ع

مثـ٣ــال : إذا كانت $ا = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ & ٤ \\ ١ & ٩ & ٦ \\ -٢ & ٥ & ٠ \end{pmatrix}$ **أكتب نظم ا ثم أوجد** $ا_{٢١}$ ، $ا_{٢٣}$ ، $ا_{٢٢}$ ، $ا_{١٣}$ ..

الحـــــــل

نظم ا هو ٣ × ٣ ، $ا_{٢١} = ٣$ ، $ا_{٢٣} = ٥$ ، $ا_{٢٢} = ٩$ ، $ا_{١٣} = -٢$

****

مثـــ٤ـــال : فى المصفوفة $ا = \begin{pmatrix} -١ & ٣ & ٥ \\ ٤ & ٧ & ١٠ \\ -٣ & -٢ & ٠ \end{pmatrix}$ **أكمل كلا مما يأتى**

(١) $ا_{١١}$ = ... (٢) $ا_{٢٣}$ = ... (٣) $ا_{٣٢}$ = ...

(٤) $ا_{١٢}$ = ... (٥) $ا_{١٣}$ = ... (٦) $ا_{٣٢}$ = ...

مثـ٥ـال : أكتب بطريقة السرد المصفوفة (أ $_{صع}$) حيث أ $_{صع}$ = ع – ص ، أ على النظم ٢ × ٣

الحـــــــــــل

أ$_{١١}$ = ١ – ١ = ٠ ،،،،، أ$_{٢١}$ = ٢ – ١ = ١ ،،،،، أ$_{٣١}$ = ٣ – ١ = ٢

أ$_{١٢}$ = ١ – ٢ = –١ ،،،،، أ$_{٢٢}$ = ٢ – ٢ = ٠ ،،،،، أ$_{٣٢}$ = ٣ – ٢ = ١

$$أ = \begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ١- & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

****

مثـ٧ـال : أكتب المصفوفة (أ $_{صع}$) على النظم ٣ × ٣ حيث

أ$_{صع}$ = { ص + ع عندما ص < ع ، ٢ عندما ص = ع ، ع – ص عندما ص > ع }

الحـــــل

أ$_{١١}$ = ٢   أ$_{٢١}$ = ٢ – ١ = ١   أ$_{٣١}$ = ٣ – ١ = ٢

أ$_{١٢}$ = ٢+١ = ٣   أ$_{٢٢}$ = ٢   أ$_{٣٢}$ = ٣ – ٢ = ١

أ$_{١٣}$ = ٣+١ = ٤   أ$_{٢٣}$ = ٣+٢ = ٥   أ$_{٣٣}$ = ٢

$$\therefore أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٢ \end{pmatrix}$$

****

*** بعض المصفوفات الخاصة :**

١– مصفوفة الصف :

هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد و أي عدد من الأعمدة : م = ١

مثل س = (١ ٧ ٥) علي النظم ١ × ٣

٢– مصفوفة العمود :

هي المصفوفة التي تتكون من أي عدد من الصفوف و عمود واحد فقط : ن = ١

مثل س = $\begin{pmatrix} ٩ \\ ٠ \\ ٦ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$

٣- المصفوفة المربعة :

هى المصفوفة التي فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة : م = ن

مثل س = $\begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢

، س = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٥ \\ ٨ & ٦ & -١ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣

٤- المصفوفة الصفرية : المصفوفة التي كل عناصرها أصفار : رمزها ☐ " مستطيل صغير "

مثل $☐_{٢ \times ٣}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٣

٥- مدوّر المصفوفة :

لأي مصفوفة أ علي النظم م × ن إذا بدلنا الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب فإننا نحصل علي مدور المصفوفة [أ] و رمزها ($أ^{مد}$) و تكون علي النظم ن × م

ملاحظة : $(أ^{مد})^{مد}$ = أ

(٦) مصفوفة الوحدة:- هى مصفوفة مربعة جميع عناصر أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسى فهى تساوى واحد ويرمز لها بالرمز I

$I_{٢\times٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $I_{٣\times٣} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

****

مثـــ ١ ـــال : إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٥ \\ ٨ & ٦ & -١ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٩ & ٦ & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد : $أ^{مد}$ ، $ب^{مد}$ ، $ج^{مد}$

الحـــــــل

$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٠ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب^{مد} = \begin{pmatrix} -١ & ٥ & ٣ \\ ٦ & ٠ & ٢ \\ ٨ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ج^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٦ \\ ٩ \end{pmatrix}$

تساوي مصفوفتين : تتساوي المصفوفتان ﺃ، ب إذا كان :

[١] لهما نفس النظم

[٢] كل عنصر في ﺃ يساوي نظيره في ب　أي أن : $\text{ﺃ}_{\text{ص ع}} = \text{ب}_{\text{ص ع}}$

مثـــ ٢ ـــال:إذا كانت $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٧ \\ \text{ع} & ٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & \text{س} & ٧ \\ ٤ & ٣ & \text{ص} \end{pmatrix}$ **أوجد س ، ص ، ع**

الحـــــــل

من التساوي ∴ س = ٢　　، ص = ٥　　، ع = ٤

****

مثـــ٣ـــال إذا كانت $\begin{pmatrix} \text{جـ} - \text{ء} & ٣ \\ ١ & ٢ \\ ٤ & \text{هـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ \text{جـ} + \text{ء} & ٢ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$ **أوجد جـ ، ء، هـ**

الحـــــــل

من التساوي : جـ − ء = ٥　　[١]

، جـ + ء = ١　　[٢]

بجمع ١ ، ٢ ينتج : ٢ جـ = ٦　　جـ = ٣

، بالتعويض فى [٢] ينتج : ٣ + ء = ١　　ء = − ٢

، من التساوي هـ = ٧

****

مثـــ٤ـــال : أوجد قيمة س ، ص ، ع إذا كانت $\begin{pmatrix} \text{ع} & \text{س} - ١ \\ ٠ & ٣\text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١٥ \end{pmatrix}$

الحـــــــل

المصفوفتان متساويتان

∴ س − ١ = ٣　　، ع = ٢　　، ٣ ص = ١٥

س = ٣ + ١ = ٤　　　　ص = $\frac{١٥}{٣}$ = ٥

****

مثـ٥ـال : إوجد قيمة س ، ص ، ع إذا كانت

$$\begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ١- \\ ٥ & ٦ & ٨ \\ ٩ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}^{مد} = \begin{pmatrix} ٦ & س & ١- \\ ع & ٦ & ٠ \\ ٩ & ٥ & ص \end{pmatrix}$$

الحـــــل

$$\begin{pmatrix} ٦ & ٨ & ١- \\ ٢ & ٦ & ٠ \\ ٩ & ٥ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & س & ١- \\ ع & ٦ & ٠ \\ ٩ & ٥ & ص \end{pmatrix}$$

بمساواة العناصر المتناظرة س = ٨ ،،،،،، ص = ٤ ،،،،،، ع = ٢

****

مثـ٦ـال : إذا كانت س = $\begin{pmatrix} هـ^{٣} & ب - ٣ & ١+أ٢ \\ ٥ & ء - & \sqrt{جـ} \end{pmatrix}$ ،،، ص = $\begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٤ & ٢ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$

أوجد أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ إذا علم أن س = ص^{مد}

الحـــــل

∵ س = ص^{مد} ∴ $\begin{pmatrix} هـ^{٣} & ب - ٣ & ١+أ٢ \\ ٥ & ء - & \sqrt{جـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٢ & ٧ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

٢أ + ١ = ٧ ، ٣ – ب = ٢ ، هـ^{٣} = ٨ ، $\sqrt{جـ}$ = ٣ ، – ء = ٤

∴ أ = ٣ ب = ١ هـ = ٢ جـ = ٩ ء = – ٤

****

مثـ٧ـال أوجد قيمتى س ، ص ، ع حتى يتحقق أن: أ = ب^{مد}

حيث أ = (٢ ٤- ٥) ، ب = $\begin{pmatrix} س \\ ص - \\ ٥ ع \end{pmatrix}$

الحـــــل

∵ أ = ب^{مد} ∴ (٢ ٤- ٥) = (س – ص ٥ع)

س = ٢ ، – ص = – ٤ ⟸ ص = ٤ ، ٥ ع = ٥ ⟸ ع = ١

****

تمـــــارين

١ – أكتب المصفوفات الآتية :

(١) المصفوفة ا = (ا $_{ص ع}$) حيث ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ع = ١ ، ٢

(٢) المصفوفة ب = (ب $_{ص ع}$) حيث ص = ١ ، ع = ١ ، ٢ ، ٣

(٣) المصفوفة جـ = (جـ $_{ص ع}$) حيث ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ع = ١

٢ – إذا كانت ا = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -٢ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٥ \\ ٩ & ٠ & ٢ \\ ٧ & ٤ & -١ \end{pmatrix}$ أكمل ما يأتى :

(١) نظم المصفوفة ا هو ٠٠٠٠٠ (٢) نظم المصفوفة ب هو ٠٠٠٠٠

(٣) العنصر ا $_{٢١}$ = ٠٠٠٠٠ (٤) العنصر ب $_{٢٣}$ = ٠٠٠٠٠

(٥) العنصر ا $_{٢٢}$ = ٠٠٠٠٠ (٦) العنصر ب $_{١١}$ = ٠٠٠٠٠

٣ – أنتجت ثلاث شركات س ، ص ، ع نوعين من الأقمشة فكان ما أنتجته الشركة س عبارة عن ١٠٠٠ متر من النوع الأول ، ١٢٠٠ متر من النوع الثاني ، و ما أنتجته الشركة ص عبارة عن ٥٠٠ متر من النوع الأول ، ٩٠٠ متر من النوع الثاني ، و ما أنتجته الشركة ع عبارة عن ٧٠٠ متر من النوع الأول ، ٤٠٠ متر من النوع الثاني ، أكتب هذه البيانات في صورة مصفوفة (ا) علي النظم ٣×٢ ، و أكتب أيضاً هذه البيانات في صورة مصفوفة (ب) علي النظم ٢×٣

٤ – محلان لبيع الملابس في أحد الأيام باع المحل الأول ٢٠ قميص ، ٥ بدل ، ١٢ حذاء ، و باع المحل الثاني ١٣ قميص ، ٣ بدل ، ١٤ حذاء ، أكتب هذه البيانات في صورة مصفوفة س علي النظم ٢×٣

٥ – أوجد مدور المصفوفات الآتية :

س = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٢ & -٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ & -٣ \\ ٢ & ٤ & ١ \\ ١ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ع = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٤ \\ ٢ \end{pmatrix}$

٦ – إذا كانت $\begin{pmatrix} \text{س}^{٢} & -٣ \\ ٥ & \text{ص}+٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٠ & ٨ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمتي س ، ص

٧ – إذا كانت $\begin{pmatrix} ٦ & \text{س} & ٥ \\ \text{س}+\text{ص} & ٤ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ١ & ٥ \\ ٥ & ٤ & \text{ع} \end{pmatrix}$ فأوجد س ، ص ، ع

٨ – إثبت أنه لجميع قيم س ، ص لا يمكن أن تتحقق المساواة الأتية

$$\begin{pmatrix} ٣\text{س}-\text{ص} & ٧ \\ ٢\text{ص} & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ -٤ & \text{ص}-\text{س} \end{pmatrix}$$

٩ – إذا كانت ا = $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ & ٦ \\ ٠ & ٨ & ٩ \end{pmatrix}$

أذكر نظم ا ، ب ثم أوجد $\text{ا}^{\text{مد}}$ ، $\text{ب}^{\text{مد}}$

١٠ – إذا كانت ا = $\begin{pmatrix} ٢ & \text{س} \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & \text{ص} \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ وكان $\text{ب}^{\text{مد}}$ = ا فأوجد س ، ص

١١ – أوجد قيم : س ، ص ، ع التى تجعل المصفوفتان متساويتان

$$\begin{pmatrix} \text{س} & ٢ & ٤ \\ -١ & \text{ص} & ٥ \\ ٤ & ٣ & ١ \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & \text{ع} \\ -١ & \text{ع}-١ & ٥ \\ ٤ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$$

****

العمليات على المصفوفات

أولاً الجمع :

إذا كانت س ، ص مصفوفتين لهما نفس النظم فإن : عملية الجمع تكون ممكنة ويكون ناتج الجمع عبارة عن مصفوفة لها نفس النظم وكل عنصر فيها يســـاوى ناتج جمع العنصرين المتناظرين

مثـــال١: إذا كانت $\text{س} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ أوجد س + ص

الحـــل

$$\text{س} + \text{ص} = \begin{pmatrix} 5+0 & 3+2 \\ 0-1 & 2+7 \\ 4+6 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 9 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

****

مثـــال٢: إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ أوجد $\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}}$

الحـــل

$$\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$$

ملاحظة : عملية جمع مصفوفتين ليس لهما نفس النظم غير ممكنة

****

مثـــال٣ : إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

أوجد كلا مما يأتى (١) أ + ب (٢) ٣ أ + ٢ب (٣) $2\,\text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

الحـــل

$$(1)\ \text{أ} + \text{ب} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

(٢) $٣ ﺃ + ب = ٣ \begin{pmatrix} ٧ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & -٩ \\ -٩ & ١٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & -٥ \\ -٣ & ٢٢ \end{pmatrix}$

(٣) $٢ ﺃ^{مد} + ب^{مد} = ٢ \begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ ٦ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & -٦ \\ -٦ & ١٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ ٦ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٧ & -٢ \\ ٠ & ١٣ \end{pmatrix}$

****

ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة :

إذا كانت : سـ مصفوفة على النظم م × ن

فإن : ضرب أى عدد حقيقى ك حيث ك ≠ صفر فى المصفوفة سـ هو : المصفوفة

ع = ك سـ من النظم م × ن ونحصل على المصفوفة ع بضرب العدد الحقيقى ك فى

كل عنصر نت عناصر المصفوفة سـ

مثـــ٣ـــال : : إذا كانت : سـ = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ك = ٣

الحـــــــل

∴ ك سـ = ٣ × $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & ٣ \\ ١٢ & ٦ \end{pmatrix}$

خواص عملية جمع المصفوفات :

بفرض أن : سـ ، صـ ، ع ثلاث مصفوفات من النظم م × ن فإن :

[١] **خاصية الإنغلاق :** سـ + صـ تكون مصفوفة من نفس النظم م × ن

[٢] **خاصية الإبدال :** سـ + صـ = صـ + سـ

[٣] **خاصية الدمج :** (سـ + صـ) + ع = سـ + (صـ + ع) = سـ + صـ + ع

[٤] **خاصية المحايد الجمعى :** سـ + □ = □ + سـ = سـ

حيث : □ مصفوفة صفرية من نفس نظم سـ

[٥] **خاصية المعكوس " النظير " الجمعى :**

لأى مصفوفة سـ يوجد مصفوفة (− سـ) من نفس النظم بحيث :

س + (− س) = ▭ حيث : ▭ مصفوفة صفرية من نفس نظم س

و تسمى المصفوفة (− س) المعكوس الجمعى للمصفوفة س

ثانياً الطرح :

إذا كانت : المصفوفتين س ، ص مصفوفتين على نفس النظم م × ن

فإن : س − ص = س + (− ص) على نفس النظم م × ن

****

مثـــال٤ : : إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ أوجد س − ص

س − ص = $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

****

مثـــال٥: إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٤ & -١ & ٢ \\ ٧ & ١ & -١ \end{pmatrix}$ أوجد ٣س − ٢ص

الحـــــل

٣س − ٢ص = ٣ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ − ٢ $\begin{pmatrix} ٤ & -١ & ٢ \\ ٧ & ١ & -١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ٠ \\ ٦ & ٠ & ٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٨ & ٢ & -٤ \\ -١٤ & -٢ & ٢ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} -٥ & ٨ & -٤ \\ -٨ & -٢ & ١١ \end{pmatrix}$

****

مثـــال٦ : إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٥ \\ -٢ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٤ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س بحيث : ٢ ب + $\text{س}^{\text{مد}}$ = ٣ أ

الحـــــل

٢ب + $\text{س}^{\text{مد}}$ = ٣ أ　　$\text{س}^{\text{مد}}$ = ٣أ − ٢ ب = ٣× $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٥ \\ -٢ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ − ٢× $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٤ \end{pmatrix}$

$$س^{مد} = \begin{pmatrix} ١٥ & ٣ & ٦ \\ ١٢ & ٦ & -٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٦ & ٠ & -٢ \\ -٨ & ٢ & -١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & ٣ & ٤ \\ ٤ & ٨ & -١٦ \end{pmatrix}$$

، $(س^{مد})^{مد} = س$　　　　$س = ...$

****

مثــ٧ــال : إذا كانت $٢\,أ^{مد} + \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٦ \\ ٤ & -١٠ & ٨ \end{pmatrix} = \square$ **فأوجد** $أ$

الحـــــــل

$$٢\,أ^{مد} = \square - \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٦ \\ ٤ & -١٠ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & -٢ & -٦ \\ -٤ & ١٠ & -٨ \end{pmatrix}$$

$$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٠ & -١ & -٣ \\ -٢ & ٥ & -٤ \end{pmatrix} \quad \therefore أ = \begin{pmatrix} -٤ & -٣ \\ ٥ & -١ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$$

****

مثــ٨ــال : إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & -٤ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٧ & ٠ \\ -٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & -٣ \\ -١ & ٧ & -٦ \end{pmatrix}$

أوجد　(١) $أ + ب$　　(٢) $ب + ج^{مد}$　　(٣) $ج + ٢\,أ^{مد}$　　(٤) $أ + ج$

الحـــــــل

$$(١)\ أ + ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & -٤ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & ٠ \\ -٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٢ \\ ٢ & -٢ \\ ٥ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$(٢)\ ب + ج^{مد} = \begin{pmatrix} ٧ & ٠ \\ -٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٦ & -٣ \\ ٧ & ٤ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٤ & ٦ \\ ٦ & ٩ \end{pmatrix}$$

$$(٣)\ ج + ٢\,أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & -٣ \\ -١ & ٧ & -٦ \end{pmatrix} + ٢ \begin{pmatrix} ١ & -٤ & ٢ \\ -٢ & ٥ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & -٣ \\ -١ & ٧ & -٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & -٨ & ٤ \\ -٤ & ١٠ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & -٤ & ١ \\ -٥ & ١٧ & ٠ \end{pmatrix}$$

(٤) أ + جـ [لا يمكن جمع المصفوفتان أ ، جـ لاختلافهما فى النظم]

****

مثــ٩ــال : إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

إثبت أن (أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}

الحـــــــل

أ + ب = $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

(أ + ب)^{مد} = $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 8 \\ 8 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ (١)

أ^{مد} + ب^{مد} = $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 8 \\ 8 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن : (أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}

****

مثــ١٠ــال: أوجد س ، ص ، ع إذا كان $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{٢ع} & \text{ل}+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$

الحـــــــل

$\begin{pmatrix} \text{س} + 3 & \text{ص} - 4 \\ \text{٢ع} + 1 & \text{ل} + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$

س+٣=٧ ، ص − ٤ = ١ ، ٢ع +١ = ١٥ ، ل + ٤ = ٢

∴ س = ٤ ، ص = ٥ ، ع = ٧ ، ل = −٢

****

تمـــــارين

١ ـ أوجد ناتج ما يأتى :

(١) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 11 \\ 6 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

٢ ـ إختصر : $3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

٣ ـ إذا كان : $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ أوجد : أ ، ب ، حـ ، ء

٤ ـ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س بحيث :

$$3\,\text{أ}^{\text{مد}} - \text{س} = 2\,\text{ب} - 3\,\text{س}^{\text{مد}}$$

٥ ـ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ أوجد أ + ب ، ٢ أ ـ ٣ ب

٦ ـ إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س التي تحقق العلاقة ٢ أ + س = ٣ ب

٧ ـ إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ فأوجد كلا من :

$\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}}$ ، $\text{أ}^{\text{مد}} - \text{ب}$ ، $\text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$ إن أمكن

٨ ـ إذا كانت $\text{س} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة أ التي تحقق العلاقة : ٢ أ + ص ـ س = ☐

٩ ــ إذا كانت : س + ٢ $س^{مد}$ + $\begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٦ & ١ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س

١٠ ــ إذا كان : س − $س^{مد}$ − $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ب & أ \\ ء & جـ \end{pmatrix}$ أوجد : س

، إذا كانت : س = □ $_{٢×٢}$ أوجد : أ ، ب ، جـ ، ء

١١ ــ إذا كانت : المصفوفة $\begin{pmatrix} جـ - ١ & أ - ٥ \\ ٤ & ب + ٣ \end{pmatrix}$ هى المعكوس الجمعى للمصفوفة

$\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ -٤ & ٢أ - ٣ \end{pmatrix}$ أوجد : أ ، ب ، جـ

١٢ ــ أوجد قيم : س ، ص التى تحقق المعادلة : س $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ + ص $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٦ \\ -٨ \end{pmatrix}$

١٣ ــ أوجد المصفوفة س التى تحقق :

س + $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١ \\ ١ & -٣ & ٢ \end{pmatrix}$ = ٣ س + $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

ثم أوجد ٢ $س^{مد}$

١٤ ــ إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & -٢ \\ ٤ & ٢ & -٣ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٣ \\ -٣ & ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

، ع = $\begin{pmatrix} -٤ & ٢ & ١ \\ ٥ & -٢ & ٣ \end{pmatrix}$

أثبت أن : (س + ص) + ع = س + (ص + ع)

****



ضرب المصفوفات

إذا كانت : س ، ص مصفوفتان فإن : س ، ص تكونان قابلتين للضرب إذا كان عدد أعمدة المصفوفة س يساوى عدد صفوف المصفوفة ص

أى أن :

إذا كانت : س مصفوفة من النظم م × ن ، ص مصفوفة من النظم ن × ل

فإن : حاصل الضرب س × ص = ع حيث ع مصفوفة من النظم م × ل

ملاحظة :

عملية ضرب المصفوفات تكون ممكنة فى حالة واحدة فقط وهى :

عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية

****

مثـــال: $أ = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ فأوجد : أ ب ، ب أ

الحـــل



$أ ب = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2\times2+3\times2+1\times3 & 2\times1+3\times4+1\times1 \\ 1\times2+1\times2+2\times3 & 1\times1+1\times4+2\times1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4+6+3 & 2+12+1 \\ 2+2+6 & 1+4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$

. لاحظ أن : أ علي النظم ٢ × ٣ ، ب علي النظم ٣ × ٢ ، أ ب علي النظم ٢ × ٢

$ب أ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & 6+1 & 2+2 \\ 4+4 & 6+4 & 2+8 \\ 6+1 & 9+1 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 8 & 10 & 10 \\ 7 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

مثـــال ٢: إذا كانت : ا = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

إثبت أن : ا (ب + جـ) = ا ب + ا جـ

الحـــــــل

∴ ا (ب + جـ) = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$ (١)

∴ ا ب + ا جـ = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$ (٢) ∴ ا (ب+جـ) = ا ب + ا جـ

****

ملاحظات هامة جداً :

١ – $(ا\,ب)^{مد} = ب^{مد}\ ا^{مد}$

٢ – $ا^2 = ا \times ا$ ، $ا^4 = ا^2 \times ا^2$ [حيث ا مصفوفة مربعة]

مثـــال ٣ : إذا كانت : ا = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة : $ا^2 - 3$ ب

الحـــــــل

$ا^2 = ا \times ا = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 16 & 27 \end{pmatrix}$

∴ $ا^2 - 3$ ب $= \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 16 & 27 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

****

مثـــال ٤ : إذا كانت ا = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ فأوجد $ا^4$

الحـــــــل

$$\therefore \text{ا}^2 = \text{ا} \times \text{ا} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\text{ا}^4 = \text{ا}^2 \times \text{ا}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 203 \\ 0 & 625 \end{pmatrix}$$

****

مصفوفة الوحدة (I)

هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيسي فيها = ١ ، و باقي العناصر أصفار

مثل $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

خواص عملية ضرب المصفوفات:

١ – **خاصية الدمج " التنسيق "** :

إذا كانت : س ، ص ، ع ثلاث مصفوفات فإن : (س ص) ع = س (ص ع)

٢ – **خاصية المحايد الضربى** :

لأى مصفوفة س فإن : س × I = I × س = س

حيث I مصفوفة الوحدة من نفس نظم س

٣– **خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها** :

س (ص + ع) = س ص + س ع

، (س + ص) ع = س ع + ص ع

****

مثـــال : إذا كانت : $\text{ا} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ فإثبت أن : $\text{ا}^2 - 5\text{ا} + 2I = \square$

الحـــــل

$$\therefore \text{ا}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -20 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{ا}^2 - 5\text{ا} + 2I = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -20 & 13 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ -٢٠ & ١٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٠ & -٥ \\ -٢٠ & ١٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square$$

****

مثـ٦ـال : إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ **إثبت أن** $(\text{أ ب})^{٢} \neq \text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{٢}$

الحـــل

$$\text{أ ب} = \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١\times٣ + ٣\times٠ & -١\times-٢ + ٣\times١ \\ ٤\times٣ + -٢\times٠ & ٤\times-٢ + -٢\times١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٥ \\ ١٢ & -١٠ \end{pmatrix}$$

$$(\text{أ ب})^{٢} = (\text{أ ب})(\text{أ ب}) = \begin{pmatrix} -٣ & ٥ \\ ١٢ & -١٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٣ & ٥ \\ ١٢ & -١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦٩ & -٦٥ \\ -١٥٦ & ١٦٠ \end{pmatrix} \quad (١)$$

$$\text{أ}^{٢} = \text{أ} \times \text{أ} = \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٣ & -٩ \\ -١٢ & ١٦ \end{pmatrix}$$

$$\text{ب}^{٢} = \text{ب} \times \text{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & -٨ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{٢} = \begin{pmatrix} ١٣ & -٩ \\ -١٢ & ١٦ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٩ & -٨ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١٧ & -١١٣ \\ -١٠٨ & ١١٢ \end{pmatrix} \quad (٢)$$

من ١ ، ٢ ينتج أن $(\text{أ ب})^{٢} \neq \text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{٢}$

****

مثـ٧ـال : أوجد المصفوفة س التى تحقق أن: $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix} \times \text{س} = \begin{pmatrix} -١ \\ ٤ \\ ٢١ \end{pmatrix}$

الحـــل

المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ من النظم ٣ × ٢ والناتج $\begin{pmatrix} -١ \\ ٤ \\ ٢١ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ١

∴ س يجب أن تكون على النظم ٢ × ١ نفرض أن $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \\ ٤ \\ ٢١ \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} \text{أ} - \text{ب} \\ ٢\,\text{أ} \\ ٣\,\text{أ} + ٥\,\text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \\ ٤ \\ ٢١ \end{pmatrix}$$

٢ ﺃ = ٤ ﺃ = ٢

ﺃ – ب = –١ ب = ٢ + ١ = ٣ ∴ س = $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

****

مثـــ٨ــال : إذا كانت ﺃ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 \\ 10 & -5 & 6 \\ -8 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ **إثبت أن : ﺃ ب = ١٠ I**

الحـــــل

$$\text{ﺃ ب} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 \\ 10 & -5 & 6 \\ -8 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 10\, I$$

****

مثـــ٩ــال : إذا كانت ﺃ = $\begin{pmatrix} ك & 0 & 0 \\ 0 & ك & 0 \\ 0 & 0 & ك \end{pmatrix}$ **أوجد ﺃ^٢ ، ﺃ^٣ وأستنتج ﺃ^ن**

الحـــــل

$$\text{ﺃ}^2 = \begin{pmatrix} ك & 0 & 0 \\ 0 & ك & 0 \\ 0 & 0 & ك \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ك & 0 & 0 \\ 0 & ك & 0 \\ 0 & 0 & ك \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ك^2 & 0 & 0 \\ 0 & ك^2 & 0 \\ 0 & 0 & ك^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ﺃ}^3 = \text{ﺃ}^2 \times \text{ﺃ} = \begin{pmatrix} ك^2 & 0 & 0 \\ 0 & ك^2 & 0 \\ 0 & 0 & ك^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ك & 0 & 0 \\ 0 & ك & 0 \\ 0 & 0 & ك \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ك^3 & 0 & 0 \\ 0 & ك^3 & 0 \\ 0 & 0 & ك^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{ﺃ}^ن = \begin{pmatrix} ك & 0 & 0 \\ 0 & ك & 0 \\ 0 & 0 & ك \end{pmatrix}^ن = \begin{pmatrix} ك^ن & 0 & 0 \\ 0 & ك^ن & 0 \\ 0 & 0 & ك^ن \end{pmatrix}$$

****

مثـــ١٠ــال : إذا كانت ﺃ = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **إثبت أن ﺃ^٢ – ﺃ – ٥ I = ▭**

الطرف الايمن = $\begin{pmatrix}٢&١\\٣&١-\end{pmatrix}^{٢} - \begin{pmatrix}٢&١\\٣&١-\end{pmatrix} - ٥\begin{pmatrix}١&٠\\٠&١\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}٧&١\\٣&٤-\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}٢&١\\٣&١-\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}٥&٠\\٠&٥\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٠&٠\\٠&٠\end{pmatrix} = \square$

****

تمـــــــارين

١ ـ أكمل ما يأتى :

(١) $(س + ص)^{مد}$ = ... + ...　　(٢) $(س ص)^{مد}$ = ... × .....

(٣) إذا كانت ج = $\begin{pmatrix}٢&٠\\٣&١\end{pmatrix}$ فإن $ج^{٢}$ = ... ، ٥ ج = ...

(٤) $\begin{pmatrix}٣\\٢\\٥\end{pmatrix}\begin{pmatrix}١-&٤&٠\end{pmatrix}$ = ...

٢ ـ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}٣&٢\\١&٤\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}٢-&١\\٤&٣\end{pmatrix}$ فأوجد أ ب ،، ب أ

٣ ـ إذا كانت س = $\begin{pmatrix}٠&٢-&٣\\١&٤&٥\end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix}١&٥\\١&٤\\٤&٠\end{pmatrix}$

أوجد : $(ص س)^{مد}$ ، س − ٢ ص

٤ ـ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}٢-&١\\٤&٢\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}٣&٠\\٤&١\end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة : س بحيث ٢ س + $س^{مد}$ = أ ب

٥ ـ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}٣&٢-\\٤&٣-\end{pmatrix}$ إثبت أن $أ^{٢}$ − ٤ أ أ + ٤ I = أ − ٢ I$)^{٢}$

٦ ـ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}٢&١\\٣&١-\end{pmatrix}$ إثبت أن $أ^{٢}$ − أ − ٥ I = $\square$

٧ ـ إذا كانت س = $\begin{pmatrix}١&٢-\\٠&٢-\end{pmatrix}$ فأوجد $س^{٤}$

٨ ـ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}٠&٢-&٣\\١&٤&١\\٤&١&١-\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}١&٢&١\\١&٠&٢\\٢&٥&١\end{pmatrix}$ أوجد $أ^{٢}$ + ٢ أ ب + $ب^{٢}$

****

المحـــــــدداتـ

تعريف

المحدد من الدرجة ن، (مكون من ن صفاً ، ن عموداً) ينشأ من حذف (ن – ١) متغير من ن من المعادلات الخطية .

مثـــال ١

اكتب المحدد الذى ينشأ من حذف المتغيرات في كل من المعادلات الاتية

أ) ٢س = – ٦
س – ٣

$$\therefore م = \begin{vmatrix} -٦ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix}$$

ب) س + ص = ٣
س - ص = ١
٢س + ٣ص = ٧

$$\therefore م = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٧ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$$

* العوامل المرافقة لعناصر محدد :

إذا اخذنا أى عنصر في المحدد $م_ر$ و ليكن $أ_{ص ع}$ (يقع في الصف رقم ص ، العمود رقم ع) و حذفنا الصف رقم ص والعمود رقم ع ، فإنه ينشأ محدد $م_{ص ع}$ من الدرجة الثانية و عند ضرب هذا المحدد الناتج في

$(-١)^{ص+ع}$ فإن الكمية الناتجة تسمى بالعامل المرافق للعنصر $أ_{ص ع}$

قاعدة الأشارات :
$$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

مثـــال ٢ : اوجد قيمة كل من المحددات الاتية

أ) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix}$ ب) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & -٣ \end{vmatrix}$

نفرض قيمة المحدد أ) $\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = ٢ \times ١ - ٥ \times ٣ = -١٣$

ب) $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & -٣ \end{vmatrix} = ١ \times ٤ - (-٣ \times ٢) = ١٠$

مثـــ٣ـــال : اوجد قيمة كل من المحددات الاتية

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} = ٢ \times -٢ - ٣ \times ٣ = -٤ - ٩ = -١٣$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ ١١ & -٢ \end{vmatrix} = ٣ \times -٢ - (٣ \times ١١) = -٦ - ٣٣ = -٣٩$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١١ \end{vmatrix} = ٢ \times ١١ - (٣ \times ٣) = ١١ - ٩ = ١٣$

****

مثـــ٤ـــال : اوجد قيمة كل من المحددا $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٧ & ٢ \\ ٥ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$

الحــــــــــل

Δ يمكن فك المحدد عن طريق أى صف أو أى عمود مع مراعاة قاعدة الاشارات

نفرض قيمة المحددΔ= $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٧ & ٢ \\ ٥ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر الصف الأول

$\therefore \Delta = ١ \times \begin{vmatrix} ٧ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ٤ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$

$= (٢٨ - ٦) - ٢ (١٦ - ١٠) + ٣ (١٢ - ٣٥) = ٢٢ - ١٢ + (-٦٩) = (-٥٩)$

****

مثـــ٥ـــال : اوجد قيمة كل من المحدد $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ ١ & ٥ & ٢ \end{vmatrix}$

الحــــــــــل

نفرض قيمة المحددΔ= $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ ١ & ٥ & ٢ \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الأول

$\therefore \Delta = ١ \times \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix}$ − صفر $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} + ١ \times \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$

$= ١ (٢ - ٢٠)$ − صفر $(١٥ - ٤) + ١ (٨ - ٣) = - ١٨$ − صفر $+ ٥ = (-١٣)$

مثـــ٦ـــال : حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ ١ & \text{س} & \text{س} \\ ٥ & ٢ & \text{س} \end{vmatrix} = ٣\,\text{س}$$

الحـــــــــــل

باستخدام عناصر الصف الاول

$$\therefore \Delta = \text{س} \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} \\ ٢ & \text{س} \end{vmatrix} - \text{صفر} + \text{صفر} = ٣\,\text{س}$$

= س (س^{٢} – ٢ س) = ٣ س

= س (س^{٢} – ٢ س – ٣) = س (س – ٣) (س + ١) = صفر

∴ س = صفر   أ، س = ٣   أ، س = –١

****

مثـــ٧ـــال : اوجد قيمة ك التى تجعل س : أحد عوامل المحدد الاتى

$$\begin{vmatrix} \text{س} - ٢ & ١ & -١ \\ ٢ & ١ & ٥ \\ ٢ & \text{س} + ٢ & \text{س} + ٢ + \text{ك} \end{vmatrix}$$

الحـــــــــــل

∵ س أحد عوامل المحدد   ∴ س = صفر هو جذر للمعادلة الناتجة

$$\therefore \begin{vmatrix} -٢ & ١ & -١ \\ ٢ & ١ & ٥ \\ ٢ & ٢ & ٢ + \text{ك} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

باستخدام عناصر الصف الاول

–٢ (ك + ٢ - ١٠) – (٢ ك + ٤ - ١٠) - (٤ - ٢) = صفر

–٢ (ك - ٨) - (٢ ك - ٦) - ٢ = –٢ ك +١٦ - ٢ ك + ٦ - ٢ = صفر

–٤ ك + ٢٠ = صفر   ∴ ك = ٥

****



* خواص المحددات

١- في أى محدد اذا تبدلت الصفوف بالاعمدة و الاعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير .

٢-قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أحد صفوفه (أعمدته) .

٣-في اى محدد اذا بدلنا موضعى صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج تساوى قيمة المحدد الاصلى مضروباَ فى(-١).

٤-اذا تساوت العناصر المتناظرة في اى صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد تساوى صفراً

مثـــ٨ـــال : $\begin{vmatrix} ٢ & -٧ \\ ٢ & -٧ \end{vmatrix} = \text{صفر}$　　لأن $ص_١ = ص_٢$

٥-اذا وجد عامل مشترك في جميع عناصر صف (عمود) في محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد .

مثـــ٩ـــال : $\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٢٥ & ٥ \end{vmatrix} = \text{صفر}$　　لأن $٥ \times ص_١ = ص_٢$ أ،

أخذ (٥) عامل مشترك من العمود الأول فيكون المحدد $= ٥ \times \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٥ & ٥ \end{vmatrix} = ٥ \times ٠ = ٠$

٦-اذا كانت جميع عناصر أى صف (عمود) في محدد تساوى صفراً فإن قيمة المحدد تساوى صفراً .

مثـــ١٠ـــال : $\begin{vmatrix} ٢ & ٨ \\ \text{صفر} & \text{صفر} \end{vmatrix} = \text{صفر}$　　لأن جميع عناصر الصف الثانى أصفار

٧- في أى محدد اذا كتبت جميع عناصر صف (عمود) كمجموع عنصرين فإن قيمة المحدد يمكن كتاباتها كمجموع قيمتى محددين.

مثال١١ :

$$\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \\ ٤ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٤ & ٣ & ٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$$

ثابت = صفر + $(-١) \times (-١٣) = ١٣$

٨–اذا أضفنا على عناصر أى صف (عمود) في محدد مضاعفات أى صف (عمود) أخر فإن قيمة المحدد لا تتغير .

مثـــ١٢ـــال : بدون فك المحدد

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{س} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{س} & \text{أ} & \text{أ} \end{vmatrix}$$

اثبت أن قيمته = $(\text{س} + ٢\text{أ})(\text{س} - \text{أ})^{٢}$

الحـــــــــــــل

$$\therefore \text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{س}+٢\text{أ} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{س}+٢\text{أ} \\ \text{س} & \text{أ} & \text{س}+٢\text{أ} \end{vmatrix}$$

$ع_٢ + ع_٣ + ع_١$ أى بجمع العمود الثالث والثاني على العمود الأول

$$= (\text{س}+٢\text{أ}) \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & ١ \\ \text{أ} & \text{س} & ١ \\ \text{س} & \text{أ} & ١ \end{vmatrix}$$

وأخذ الناتج مشترك

$$= (\text{س}+٢\text{أ}) \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & ١ \\ ٠ & \text{س}-\text{أ} & ٠ \\ \text{س}-\text{أ} & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

أى بطرح الصف الأول من كل من الصف الثاني والثالث فإن المحدد

نفك المحدد باستخدام عناصر العمود الأول

$\therefore$ قيمة المحدد = $(\text{س} + ٢\text{أ})(\text{س} - \text{أ})^{٢}$

****

٩– في أى محدد اذا ضربنا عناصر صف (عمود) في العوامل المرافقة للعناصر المناظرة في صف (عمود) أخر و جمعنا الناتج فإن النتيجة = صفر

١٠ – قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & \text{أ}_{١١} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{١٣} \end{vmatrix} \text{ ، أ } \begin{vmatrix} \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٢٢} & ٠ \\ \text{أ}_{٣٣} & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

تساوى $\text{أ}_{١١}\ \text{أ}_{٢٢}\ \text{أ}_{٣٣}$ و المحدد بهذه الصورة يسمى بالصورة المثلثة.

مثـــ١٣ـــال : بدون فك المحدد

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ٣ \times ٢ \times ٥ = ٣٠ \text{ ، } \begin{vmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٦ & -٣ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٣ \times -٣ \times ٢ = -١٨$$

مثـــال١٤: اثبت أن المحدد Δ = $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ا} & ٠ \\ \text{حـ} & ٠ & -\text{ا} \\ ٠ & -\text{حـ} & -\text{ب} \end{vmatrix}$ = صفر مهما كانت قيم ا، ب، حـ

الحـــــــــــل

∴ Δ = (ـ ١) × $\begin{vmatrix} -\text{ب} & -\text{ا} & ٠ \\ -\text{حـ} & ٠ & \text{ا} \\ ٠ & \text{حـ} & \text{ب} \end{vmatrix}$

بضرب كل صف من الصفوف الثلاثة × ـ١

∴ Δ = (ـ ١) مدور Δ   خاصية (١)   ∴ Δ = ـ Δ

∴ ٢ Δ = صفر   ∴ Δ = صفر

****

مثـــال١٥: اثبت أن $\begin{vmatrix} \text{ان} & \text{ام} & \text{ال} \\ \text{بن} & \text{بم} & \text{ام} \\ \text{حن} & \text{بن} & \text{ان} \end{vmatrix}$ = ان (بل ـ ام) (حم ـ بن)

الحـــــــــــل

Δ = ان $\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ام} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{بم} & \text{م} \\ \text{حـ} & \text{بن} & \text{ن} \end{vmatrix}$

ا عامل مشترك من ع$_1$ ، ن عامل مشترك من ع$_3$

Δ = ان $\begin{vmatrix} \text{ا} & ٠ & \text{ل} \\ \text{ب} & ٠ & \text{م} \\ \text{حـ} & \text{بن}-\text{حم} & \text{ن} \end{vmatrix}$

اضافة ـ م×ع$_3$ + ع$_2$

فك المحدد بالصف الثالث

Δ = ان (بن ـ حم) × $\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{م} \end{vmatrix}$ = ان ×ـ (بن ـ حم) (بل ـ ام)

= ان × (حم ـ بن) (بل ـ ام)

****

• المعكوس الضربى للمصفوفة :

الشرط اللازم والكافى لايجاد المعكوس الضربى أن تكون المصفوقة غير منفردة

مصفوفة صفرية $|أ| \neq$ صفر ، مصفوفة وحدة $|أ| \neq I$

الطريقة : (١) نوجد المحددات الصغرى للعناصر

(٢) نطبق قاعدة الاشارات

(٣) مدور المصفوفة فنحصل على المصفوفة الملحقة ($أ^{مل}$)

(٤) نوجـد $|أ|$ (٥) فيكون $أ^{-١} = \frac{أ^{مل}}{|أ|}$

مثـــ١٦ـــال : عين نوع المصفوفات من حيث كونها منفردة أو غير منفردة

(أ) $\begin{pmatrix} ١٥ & ٣ \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ -٩ & -٦ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٨ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & -١ \end{pmatrix}$

الحـــــــل

(أ) $|أ| = ٢٤ - ٣٠ \neq$ صفر ∴ المصفوفة غير منفردة

(ب) $|ب| = -٣٦ - (-٣٦) =$ صفر ∴ المصفوفة منفردة

(ج) $|جـ| = ١ \times ٢ - ٢ \times ١٢ + ٥ \times ٥ \neq$ ∴ المصفوفة غير منفردة

****

مثـــ١٧ـــال : أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix}$

الحـــــــل

$|أ| = -١٥ - (-١٤) \neq$ صفر ∴ المصفوفة غير منفردة

الطريقة (١) المحددات الصغرى للعناصر $\begin{vmatrix} -٢ & -٣ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix}$

(٢) نطبق قاعدة الاشارات $\begin{vmatrix} +٢ & -٣ \\ ٥ & -٧ \end{vmatrix}$

(٣) مدور المصفوفة فنحصل على المصفوفة الملحقة ($أ^{مل}$) $\begin{pmatrix} -٧ & -٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

(٤) نوجـد $|أ| = -١٥ - (-١٤) = -١$

(٥) فيكون $أ^{-١} = \frac{أ^{مل}}{|أ|} = \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} -٧ & -٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ -٥ & -٢ \end{pmatrix}$

مثـــال ١٨ : أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

الحـــــــل

$|ب| = 4 - (6) \neq$ صفر ∴ المصفوفة غير منفردة

الطريقة (١) المحددات الصغرى للعناصر $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

(٢) نطبق قاعدة الاشارات $\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$

(٣) مدور المصفوفة فنحصل على المصفوفة الملحقة ($ب^{مد}$) $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(٤) نوجـــد $|ب| = 4 - (6) = -2$

(٥) فيكون $ب^{-1} = \frac{ب^{مد}}{|ب|} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

****

مثـــال ١٩ : أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة س = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 21 \end{pmatrix}$

الحـــــــل

المحددات الصغرى $\begin{vmatrix} (-36 - 5) & (42 - 1) & (10 + 3) \\ (-21 - 10) & (21 - 2) & (5 + 1) \\ (-1 + 6) & (1 - 4) & (-3 + 2) \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -68 & 41 & 13 \\ -31 & 19 & 6 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

قاعدة الاشارات $\begin{vmatrix} -68 & -41 & 13 \\ 31 & 19 & -6 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} \Leftarrow (س^{مد}) = \begin{vmatrix} -68 & 31 & 5 \\ -41 & 19 & 3 \\ 13 & -6 & -1 \end{vmatrix}$

$|س| = -68(-19 + 18) - 31(41 - 39) + 5(246 - 247) = 1$

∴ $س^{-1} = \frac{س^{مد}}{|س|} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -68 & 31 & 5 \\ -41 & 19 & 3 \\ 13 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -68 & 31 & 5 \\ -41 & 19 & 3 \\ 13 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

تمـــــــارين

١ ــ عين نوع كل من المصفوفات الآتية من حيث كونها منفردة أو غير منفردة

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١٣ & -٨ \\ ٧ & -٥ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٨ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & -١ \end{pmatrix}$ (ء) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ -٥ & -١ & ٤ \\ ٨ & ١١ & ٣ \end{pmatrix}$

٢ ــ أوجد قيمة س التى تجعل كلاً من المصفوفات الآتية منفردة

(أ) $\begin{pmatrix} -٣ & ٣س \\ ٢ - س & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} س - ٤ & -٢س \\ س + ١ & -٣ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ١ & س & س^{٢} \\ ١ & ٢ & ٤ \\ ١ & -٣ & ٩ \end{pmatrix}$ (ء) $\begin{pmatrix} ٣س & ٢ & ٣س - ٢ \\ ٢س - ١ & س + ١ & ٤ \\ ٢س - ١ & ١ & ٢س \end{pmatrix}$

٣ ــ أوجد المعكوس الضربى لكل من للمصفوفات الآتية :

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٧ & ٤ \\ -١١ & ٧ \end{pmatrix}$

٤ ــ أوجد المعكوس الضربى لكل من للمصفوفات الآتية :

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٥ & ١ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٩ & ٢ \\ ٥ & ٨ & ٢ \end{pmatrix}$

٥ ــ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٩ & ١٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٧ & -٧ \\ ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

أوجد حاصل الضرب أ ب . لماذا لا تكون المصفوفة أ هى المعكوس الضربى للمصفوفة ب

٦ ــ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٩ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٨ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

حقق أن $(أ + ب)^{-١} \neq أ^{-١} + ب^{-١}$

****

البرمجة الخطية

حل متباينات الدرجة الأولي في متغير واحد

نعلم أن : الجمل الرياضية : س > ٣ ؛ ٣ س – ١ ⩽ ٤

تسمى متباينة من الدرجة الأولى فى متغير واحد

خواص التباين : إذا كان س ، ص ، ع أعداداً حقيقية وكان س > ص فإن :

(١) س + ع > ص + ع سواء كانت ع موجبة أو سالبة " خاصية الإضافة "

فمثلا : إذا كان س > ٣ فإن س + ٤ > ٧ (بإضافة ٤ للطرفين)

(٢) إذا كان ع > صفر فإن : س ع > ص ع خاصية الضرب فى عدد حقيقى موجب

فمثلا : إذا كان س >٥ فإن ٣ س> ١٥ (بضرب الطرفين فى ٣)

(٣) إذا كان ع < صفر فإن : س ع < ص ع خاصية الضرب فى عدد حقيقى سالب

فمثلا : إذا كان س > ٥ فإن – ٣ س < – ١٥ (بضرب الطرفين فى – ٣)

****

مثـ١ـال : أوجد فىح مجموعة حل المتباينة الآتية ومثلها على خط الأعداد : ٣ س – ٤ > ٥

الحـــــــــل

∵ ٣ س – ٤ > ٥ بإضافة المعكوس الجمعى للعدد (– ٤) وهو (٤) للطرفين

∴ ٣ س – ٤ + ٤ > ٥ + ٤

∴ ٣ س > ٩ بالضرب فى المعكوس الضربى للعدد (٣) وهو ($\frac{1}{3}$)

∴ س > ٣ ∴ مجموعة الحل =] – ∞ ، ٣ [

****

مثـ٢ـال : أوجد فىح مجموعة حل المتباينة الآتية ومثلها على خط الأعداد : ٤ – ٢س ⩽ ٦

الحـــــــــل

∵ ٤ – ٢س ⩽ ٦ بإضافة المعكوس الجمعى للعدد (٤) وهو (–٤) للطرفين

∴ ٤ – ٢س – ٤ ⩽ ٦ – ٤

∴ – ٢ س ⩽ ٢ بقسمة الطرفين على (–٢)

∴ س ⩾ ١ ∴ مجموعة الحل = [١ ، ∞ [

مثــ٣ــال : مثل بيانياً مجموعة حل المتباينة : س + ٨ < ٣س − ٢ ≤ س + ٢ واكتبها على صورة فترة

الحـــــــــــل

∵ س + ٨ < ٣س − ٢ ≤ س + ٢   بطرح س من أطراف المتباينة

∴ س + ٨ − س < ٣س − ٢ − س ≤ س + ٢ − س

∴ ٨ < ٢س − ٢ ≤ ٢   بقسمة الطرفين على (−٢)

∴ ١٠ < ٢س ≤ ٤   بإضافة (٢) الى أطراف المتباينة

∴ ٥ < س ≤ ٢   ∴ مجموعة الحل = [٢ ، ٥ [

****

مثــ٣ــال : مثل بيانياً مجموعة حل المتباينة : (٣ + س)/٥ < ٢س واكتبها على صورة فترة

الحـــــــــــل

∵ (٣ + س)/٥ < ٢ س   بضرب الطرفين فى ٥

∴ ٣ + س < ١٠ س

∴ س − ١٠ س < ٣

∴ − ٩ س < ٣   بقسمة الطرفين على (−٩)

∴ س > ١/٣   ∴ مجموعة الحل =]−∞ ،   [

****

تمارين

أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية

[١] ٢س- ٥ ≤ ٣

[٢] ٣س+ ١ < ٧

[٣] -٤ ≤ س+ ١ ≤ ٥

[٤] ٧- ٢س ≥ ٥

[٥] س+ ٢ ≤٢س + ٥ ≤س + ١١

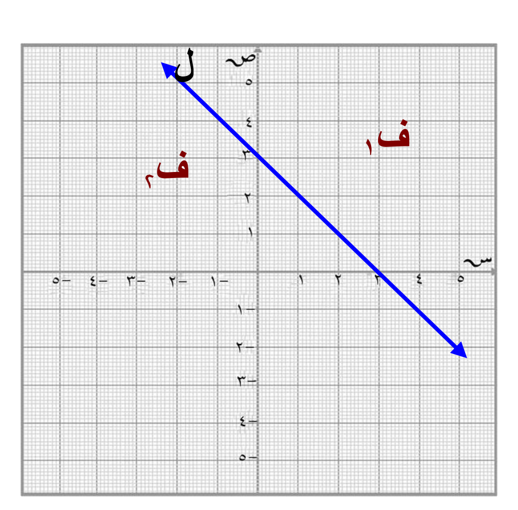
****

حل متباينة الدرجة الأولي في متغيرين

نعلم أن :

المعادلة : ٲ س + ب ص = حـ هى معادلة خطية " من الدرجة الأولى " يمثلها بيانياً خط مستقيم ، و مجموعة الحل لها عدد لا نهائى من الأزواج المرتبة التى تحققها

مثـــال١: أوجد مجموعة المعادلة : س + ص = ٣ بيانياً



الحـــــل

س	٠	٣	١
ص	٣	٠	٢

يكفى نقطتى تقاطع المستقيم مع المحورين

و ذلك بوضع " س = ٠ ثم إيجاد قيمة ص "

، بوضع " ص = ٠ ثم إيجاد قيمة س "

والثالثة للتأكيد

المستقيم ل هو التمثيل البيانى للمعادلة : س + ص = ٣

ملاحظات :

* المستقيم ل يقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط

(١) مجموعة نقط المستقيم ل وهى مجموعة النقاط التى تحقق معادلته ويسمى المستقيم الحدى

(٢) ف١ وهى مجموعة نقط المستوى والتى تقع على أحد جانبى المستقيم ل وهى نصف المستوى

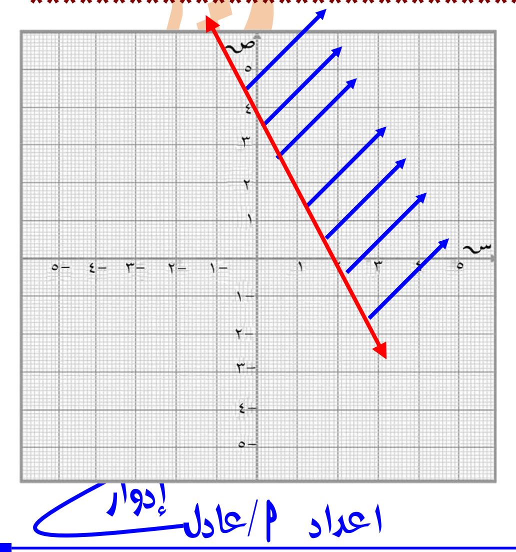
(٣) ف٢ وهى مجموعة نقط المستوى والتى تقع على الجانب الآخر للمستقيم ل وهى النصف الآخر للمستوى

****

حل متباينات الدرجة الأولى فى متغيرين بيانياً

يتضح ذلك من المثال الآتى :

مثـــال٢ : حل المتباينة : ٢س + ص ⩾ ٤



الحـــــل

نرسم المستقيم الحدي : ٢س + ص = ٤ بخط متصل

" كما فى المثال السابق "

∴ ل : ٢س+ ص = ٤ يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٢ ، ٠)

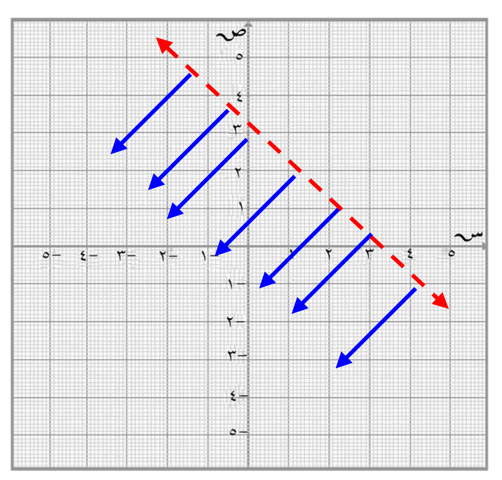
نختار أى نقطة ولتكن (٠،٠) ونعوض بها فى المتباينة ينتج : ٠ + ٠ > ٤

∴ (٠ ، ٠) لا يحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل المقابل

وهى نصف المستوى الذى لا تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠)

****



مثـــ٢ــال : حل المتباينة : س + ص < ٣

الحـــــل

نرسم المستقيم الحدي : س+ ص = ٣ بخط متقطع

∴ ل : س+ ص = ٣ يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٣ ، ٠)

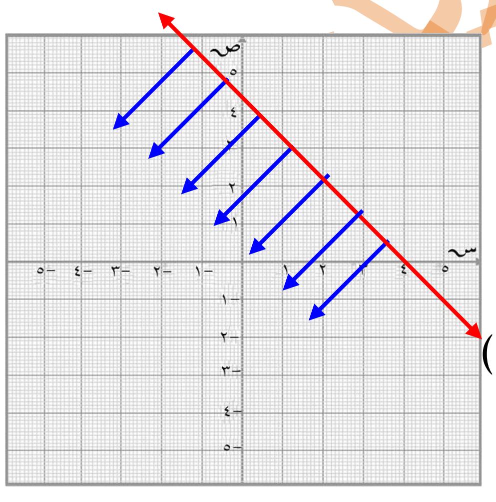
نختار أى نقطة ولتكن (٠،٠)

ونعوض بها فى المتباينة ينتج : ٠ + ٠ < ٣

∴ (٠ ، ٠) تحقق المتباينة ∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل المقابل

وهى نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠)

****



مثـــ٣ــال : حل المتباينة : $\frac{٣س}{٤}$ + $\frac{٢ص}{٣}$ ≤ ٣

الحـــــل

بالضرب × ١٢ ٩س + ٨ص ≤ ٣٦

نرسم المستقيم الحدي : ٩ س + ٨ ص = ٣٦ بخط متصل

∴ ل : ٩ س+٨ ص = ٣٦ يمر بالنقطتين (٠ ، ٤٫٥) ، (٤ ، ٠)

نختار أى نقطة ولتكن (٠،٠)

ونعوض بها فى المتباينة ينتج : ٠ + ٠ ≤ ٣٦

∴ (٠ ، ٠) لا يحقق المتباينة ∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل المقابل

وهى نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠)

ملاحظات :

** إذا كانت النقطة المختار للتعويض فى المتباينة تحققها فإن مجموعة الحل هى نصف المستوى الذى تنتمى إليه هذه النقطة

** إذا كانت علامة التباين [> ، <] يكون المستقيم متقطع

** إذا كانت علامة التباين [≤ ، ≥] يكون الخط متصل

مثـــ١ـــال : حل المتباينة س > – ٢

الحـــــــــل

المستقيم الحدي ل : س = – ٢ يمثله خط مستقيم متقطع

يوازي محور الصادات و يمر بالنقطة (– ٢ ، ٠)

∵ نقطة الأصل تحقق المتباينة س > – ٢

حيث ٠ > – ٢ ∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل المقابل

****

تدريب : حل المتباينة ٢س + ٣ص ≥ ٦

الحـــــــــل

المستقيم الحدى ل : ٠٠٠٠

يمثله خط مستقيم ٠٠٠٠

و يمر بالنقط ٠٠٠٠ النقطة (٠،٠) ٠٠٠٠

∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل المقابل

****



تدريب : حل المتباينة س ≤ ٢ ص – ٤

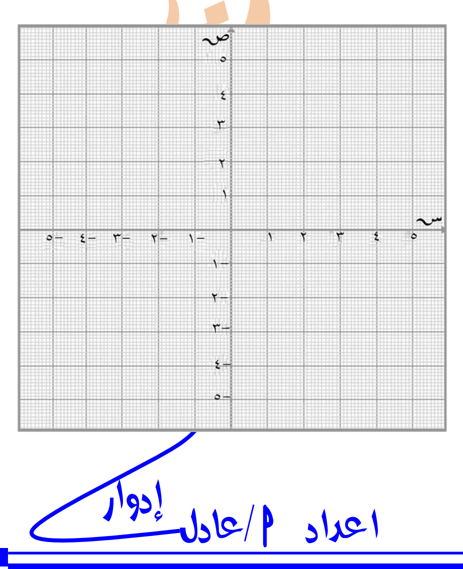
الحـــــــــل

المستقيم الحدي ل : ٠٠٠٠

يمر بالنقط ٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠

∴ النقطة ٠٠٠٠ لأن ٠٠٠٠

∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل المقابل



تمارين

مثل بيانياً مجموعة حل كلاً من المتباينات الآتية حيث س ، ص ∈ ح

[١] س+ ص ⩽ ٤　　[٢] ٢س+ ص ⩾ ٦　　[٣] ٣س + ص < ٣

[٤] ٤س+ ٣ص < ١٢　　[٥] ص ⩽ ٢س+ ٤　　[٦] ٢ص < س+ ٨

[٧] س ⩽ ٠　　[٨] ص > ٠　　[٩] س > ٣

[١٠] ٣ – ٢ س > ٢ – ص　　[١١] $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ ص > ١

[١٢] $\frac{١}{٢}$ س + ص ⩽ ٣　　[١٣] ٣ س + ٥ ص ⩾ ١٥

****

الحل البياني لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولي في متغيرين

الحل البيانى للمتباينتين : أ$_{١}$ س + ب$_{١}$ ص = حـ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ س + ب$_{٢}$ ص = حـ$_{٢}$

حيث : أ$_{١}$ ، ب$_{١}$ ، حـ$_{١}$: أ$_{٢}$ ، ب$_{٢}$ ، حـ$_{٢}$ ∈ ح

هو مجموعة الأزواج المرتبة التى تحقق كلاً من المتباينتين معاً

أى إذا كان : ع$_{١}$ = مجموعة حل المتباينة الأولى ، ع$_{٢}$ = مجموعة حل المتباينة الثانية

فإن مجموعة الحل للمتباينتين معاً = ع$_{١}$ ∩ ع$_{٢}$

مثــ١ــال : حل المتباينتين س + ٢ ص ⩽ ٤ ، ص > –١

الحـــــــل

نرسم المستقيم الحدى ل$_{١}$: س + ٢ ص = ٤ بخط متصل

و يمر بـ (٠ ، ٤) ، (٢ ، ٠)

النقطة (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة

∴ مجموعة حل المتباينة ٢ س + ص ⩽ ٤ هى نصف المستوى الذى لا تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠)

نرسم المستقيم الحدى ل$_{٢}$: ص = – ١ بخط متقطع

يوازي محور السينات و يمر بـ (٠ ، – ١)

النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة

∴ مجموعة حل المتباينة ص > −١ هى نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠)

و تكون مجموعة حل المتباينتين هى المنطقة المحصورة بين المستقيمين ل$_1$ ، ل$_2$ كما بالشكل المقابل مع ملاحظة أن نقط المستقيم ل$_2$ لا تنتمى لمجموعة الحل

****

مثــ٢ــال : أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية بيانياً

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣ س + ٢ ص ≤ ١٢

الحـــــــــــل

نرسم المستقيمات الحدية :

ل$_1$: س = ٠ هو محور الصادات خط متصل ،

ل$_2$: ص = ٠ هو محور السينات خط متصل

" و المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول "

ل$_3$: ٣س + ٢ص = ١٢ خط متصل يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٤ ، ٠)

النقطة (٠،٠) تحقق كل المتباينات

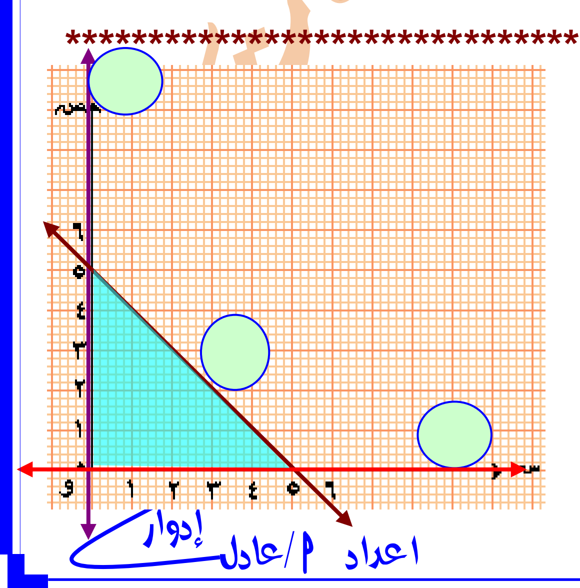
∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل التى تمثل المتباينات الثلاثة ومن الشكل هى المنطقة التى تحدد بالمثلث الذى رؤوسه النقط (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

****

مثــ٣ــال : أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية بيانياً

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٥

الحـــــــــــل



نرسم المستقيمات الحدية :

ل$_1$: س = ٠ هو محور الصادات خط متصل ،

$ل_2$: ص = ٠ هو محور السينات خط متصل

" و المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يحددان دائماً معاً الربع الأول "

$ل_3$: س + ص = ٥ خط متصل بالنقطتين (٠ ، ٥) ، (٥ ، ٠)

النقطة (٠،٠) تحقق كل المتباينات

∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل التى تمثل المتباينات

الثلاثة ومن الشكل هى المنطقة التى تحدد بالمثلث الذى رؤوسه النقط

(٠ ، ٠) ، (٥ ، ٠) ، (٠ ، ٥)

****

مثــ٤ــال : أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية بيانياً

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢ص ≤ ٨ – س ، ٢س + ص ≤ ٧

الحـــــــــل

نرسم المستقيمات الحدية :

$ل_1$: س = ٠ هو محور الصادات خط متصل ،

$ل_2$: ص = ٠ هو محور السينات خط متصل

" و المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يحددان دائماً معاً الربع الأول "

$ل_3$: ٢ص + س = ٨ خط متصل (٠ ، ٤) ، (٨ ، ٠)

النقطة (٠،٠) تحقق كل المتباينات

$ل_4$: ٢ س + ص = ٧ خط متصل (٠ ، ٧) ، (٣٫٥ ، ٠)

∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل التى تمثل المتباينات

الثلاثة ومن الشكل هى المنطقة التى تحدد بالمثلث الذى رؤوسه النقط

(٠ ، ٠) ، (٢ ، ٣) ، (٠ ، ٤) ، (٣٫٥ ، ٠)

****

مثــال : أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية بيانياً

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٤ ، ٢س + ص ≤ ٦

الحــــــل

نرسم المستقيمات الحدية :

$ل_1$: س = ٠ هو محور الصادات خط متصل ،

$ل_2$: ص = ٠ هو محور السينات خط متصل

$ل_3$: ٢ص + س = ٨ خط متصل (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٠)

النقطة (٠،٠) تحقق كل المتباينات

$ل_4$: ٢ س + ص = ٧ خط متصل (٠ ، ٦) ، (٣ ، ٠)

∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل التى تمثل المتباينات الثلاثة ومن الشكل هى المنطقة التى تحدد بالمثلث الذى رؤوسه النقط

(٠ ، ٠) ، (٢ ، ٢) ، (٠ ، ٤) ، (٣ ، ٠)

****

تمارين

أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية بيانياً

[١] س ≥ -١ ، ص > ٢

[٢] س ≤ ٣ ، ص ≥ ١

[٣] س ≤ ٢ ، س + ص > ٣

[٤] س + ٢ص ≤ ٢ ، ٢س + ص ≥ ٤

[٥] س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٤س + ص ≥ ٤

[٦] س ≥ -٢ ، ص ≥ -١ ، ٢س + ٣ص < ٠

[٧] س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص ≥ س + ٣ ، س + ٢ص ≥ ٤

[٨] س > ١ ، ص > ١ ، س + ص ≥ ٤ ، ٢س + ص ≥ ٦

[٩] س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≥ ١ ، ٣س + ٥ص ≤ ١

البرمجة الخطية

- تعتمد البرمجة الخطية على حل المتباينات و هي وسيلة قوية لإعطاء أفضل قرار في حل مشكلة أو هي الحل الأمثل لتحقيق هدف معين يمكن وضعه علي صورة دالة خطية [ر = ل س + م ص] تسمى دالة الهدف وذلك فى ضوء القيود و الإمكانيات المتاحة والتى توضع على صورة متباينات خطية تحدد بما يسمى بنظام العمل وذلك لإيجاد قيمة من مجموعة قيم حل هذه المتباينات بحيث تحقق أفضل قيمة لدالة الهدف

و لإيجاد الحل المطلوب (أكبر قيمة أو أصغر قيمة) نحدد منطقة الحلول المشتركة للمتباينات الموجودة فنجد أنه يحددها رؤوس مضلع .. و بالتعويض بهذه الرؤوس في دالة الهدف نحصل علي النقطة التي تحقق المطلوب (دالة الهدف)

****

مثـــال ١ : عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً

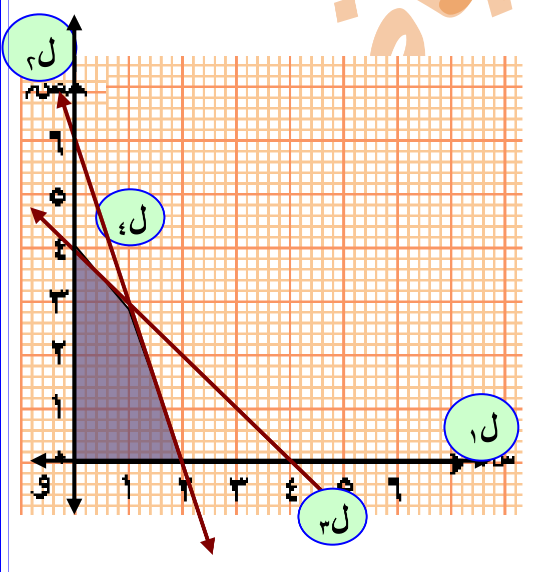
س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ص ⩽ ٤ ، ٣ س + ص ⩽ ٦ ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل (ل) أكبر ما يمكن حيث ل = ٥ س + ٣ ص

الحـــــل

كما سبق المتباينتين س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول

$ل_1$: س + ص = ٤ يمر بـ (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٠)

$ل_2$: ٣ س + ص = ٦ يمر بـ (٠ ، ٦) ، (٢ ، ٠)



مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل المقابل وهى المضلع أ و جـ ب

حيث أ(٢، ٠) ، و (٠ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٣) ، ب (١ ، ٣)

، دالة الهدف ل = ٥ س + ٣ ص

بالتعويض بالنقط للحصول علي المطلوب

∴ $ل_1$ = ٥ × ٢ + ٣ × ٠ = ١٠

، $ل_{ب}$ = ٥ × ١ + ٣ × ٣ = ١٤

، $ل_{جـ}$ = ٥ × ٠ + ٣ × ٣ = ٩

، $ل_{و}$ = ٥ × ٠ + ٣ × ٠ = صفر

∴ ل أكبر ما يمكن عند ب (١ ، ٣)

****

مثـ٢ـال : عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≤ ٨ ، ٣ س + ٢ص ≤ ١٢ ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل ل أكبر ما يمكن حيث ل = ٥٠ س + ٧٥ ص

الحـــــل

كما سبق المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول

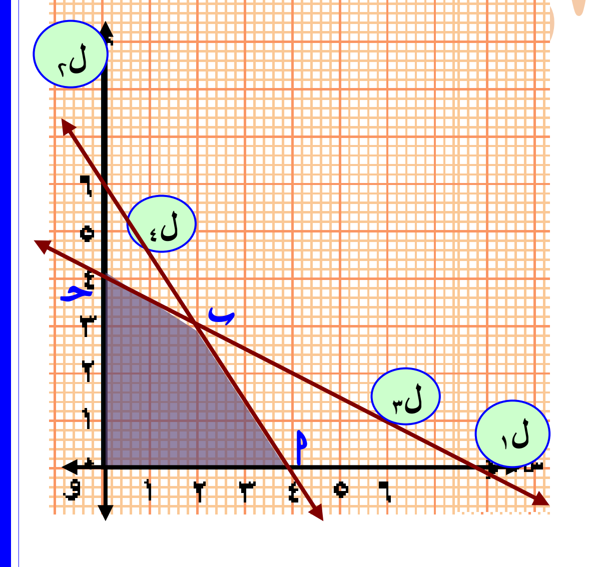
$ل_{1}$: س + ص = ٥ يمر بـ (٠ ، ٤) ، (٨ ، ٠)

$ل_{2}$: ٣ س + ٢ص = ١٢ يمر بـ (٠ ، ٦) ، (٤ ، ٠)

مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المللة بالشكل المقابل وهى المضلع ٲ و جـ ب

حيث ٲ (٤ ، ٠) ، و (٠ ، ٠) ، جـ (٠ ، ٤) ، ب (٢ ، ٣)

، دالة الهدف ل = ٥٠ س + ٧٥ ص



بالتعويض بالنقط للحصول علي المطلوب

∴ $ل_{ٲ}$ = ٥٠ × ٤ + ٧٥ × ٠ = ٢٠٠

، $ل_{ب}$ = ٥٠ × ٢ + ٧٥ × ٣ = ٣٢٥

، $ل_{جـ}$ = ٥٠ × ٠ + ٧٥ × ٤ = ٣٠٠

، $ل_{و}$ = ٥٠ × ٠ + ٧٥ × ٠ = صفر

∴ ل أكبر ما يمكن عند ب (٢ ، ٣)

****

ملاحظة :

إذا كانت علامتى التباين " ≥ " فالمنطقة التى تحقق المتباينات هى التى بها نقطة الأصل

وتأخذ شكلاً رباعياً أو مثلثاً إحدى رؤوسه تحقق دالة الهدف (الحد الأقصى)

، إذا كانت علامتى التباين " ≤ " فالمنطقة التى تحقق المتباينات هى التى ليست بها نقطة الأصل

وتمثل قاعدة هذه المنطقة خط منكسر إحدى تقطه تحقق دالة الهدف (الحدالأدنى)

****

مثـــ٣ـــال : أوجد بيانياً مجموعة حل المتباينات الأتية

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ ص ≤ ٤ ، س + ص ≤ ٣ ثم أوجد من مجموعة الحل

قيم (س، ص) التي تجعل (م) أكبر ما يمكن حيث م = ٣ س + ٤ ص

الحـــــــــل

كما سبق المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول

ل١ : س + ٢ص = ٤ يمر بـ (٠ ، ٢) ، (٤ ، ٠)

ل٢ : س + ص = ٣ يمر بـ (٠ ، ٣) ، (٣ ، ٠)

مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة الملة بالشكل

المقابل وهى المضلع ﺃ و جـ ب

حيث ﺃ(٣ ، ٠) ، و (٠ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٢) ، ب (٢ ، ١)

، دالة الهدف م = ٣ س + ٤ ص

بالتعويض بالنقط للحصول علي المطلوب

∴ م ﺃ = ٣ × ٣ + ٤ × ٠ = ٩

، م ب = ٣ × ٢ + ٤ × ١ = ١٠

، م جـ = ٣ × ٠ + ٤ × ٢ = ٨

، م و = ٣ × ٠ + ٤ × ٠ = صفر

∴ م أكبر ما يمكن عند ب (٢ ، ١)

****

مثـــ٤ـــال : عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص – س ≤ ٣ ، ٢ص + ٥س ≤ ٢٠ ثم أوجد من

مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل ر أكبر ما يمكن حيث ر = ٥ س + ٣ ص

الحـــــل

كما سبق المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول

ل١ : ص – س = ٣ يمر بـ (٠ ، ٣) ، (–٣ ، ٠)

ل٢ : ٢ ص + ٥س = ٢٠ يمر بـ (٠ ، ١٠) ، (٤ ، ٠)

مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المللة بالشكل

المقابل وهى المضلع ٲ و جـ ب

حيث ٲ(٤ ، ٠) ،و(٠ ، ٠) ،جـ (٠ ، ٣) ، ب (٢ ، ٥)

، دالة الهدف ر = ٥ س + ٣ ص

بالتعويض بالنقط للحصول علي المطلوب

∴ رٲ = ٥ × ٤ + ٣ × ٠ = ٢٠

، رب = ٥ × ٢ + ٣ × ٥ = ٢٥

، رجـ = ٥ × ٠ + ٣ × ٣ = ٩

، رو = ٥ × ٠ + ٣ × ٠ = صفر

∴ ر أكبر ما يمكن عند ب (٢ ، ٥)

****

مثـــ٥ـــال : قررت إحدي الشركات أن تقدم وجبة خفيفة لموظفيها تتكون من صنفين ، بحيث تتوفر في الوجبة الواحدة لكل شخص ٤ وحدات علي الأقل من فيتامين أ ، ٩ وحدات من فيتامين ب ، فإذا كانت الوحدة من الصنف الأول تعطي في المتوسط وحدة فيتامين أ، ٣ وحدات فيتامين ب ، و ان الوحدة من الصنف الثاني تعطي في المتوسط وحدتين من فيتامين أ، ٣ وحدات من فيتامين ب ، وكان سعر الوحدة من الصنف الأول ٧٥ قرش ، وسعر الوحدة من الصنف الثاني ٥٠ قرش ، فكم عدد الوحدات من الصنفين يعطي أرخص وجبة و تتضمن الحد الأدني من الفيتامينات

الحــــــــــــل

بفرض أن : عدد الوحدات من الصنف الأول = س

، و عدد الوحدات من الصنف الثانى = ص

	الصنف الأول س	الصنف الثانى ص	الحد الأدنى
فيتامين ا	١	٢	٤
فيتامين ب	٣	٣	٩
الثمن	٧٥	٥٠	



∵ س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠

، س + ٢ ص ⩾ ٤ ، ٣ س + ٣ ص ⩾ ٩

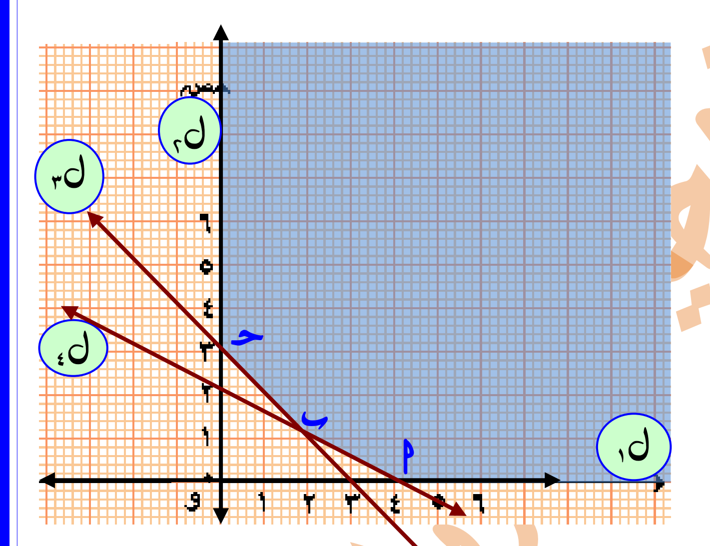
، دالة الهدف : ر = ٧٥ س + ٥٠ ص

∴ ل١ : س + ٢ ص = ٤

يمر بالنقط (٠ ، ٢) ، (٤ ، ٠)

، ل٢ : ٣ س + ٣ ص = ٩

يمر بالنقط (٠ ، ٣) ، (٣ ، ٠)



و الجزء المظلل بالشكل المقابل يمثل مجموعة حل المتباينات بيانياً

و هو منطقة محدودة بخط منكسر به النقط ا، ب ، جـ

حيث : ا(٤ ، ٠) ، ب (٢ ، ١) ، جـ (٠ ، ٣)

∵ ر = ٧٥ س + ٥٠ ص

∴ را = ٧٥ × ٤ + ٥٠ × ٠ = ٣٠٠

، رب = ٧٥ × ٢ + ٥٠ + ١ = ٢٠٠

، رجـ = ٧٥ × ٠ + ٥٠ × ٣ = ١٥٠

∴ أرخص وجبة عند جـ (٠ ، ٣) بحيث تتكون من ٣ وحدات من الصنف الثاني فقط

****



تدريب : مطحن لديه ٨٠ كجم من الذرة ، ١٢٠ كجم من القمح ، ينتج نوعين من الدقيق و يضعه في أكياس ، بحيث يلزم للكيس من النوع الأول كيلو واحد من الذرة ، ٣ كجم من القمح . يلزم للكيس من النوع الثاني ٢ كجم من الذرة ، ٢ كجم من القمح . أوجد عدد الأكياس من كل نوع التي يجب أن ينتجها المطحن ليكون دخله أكبر ما يمكن ،

علماً بأن ثمن الكيس من النوع الأول ٤ جنيه ، النوع الثاني ٢ جنيه

الحـــــل

	النوع الأول س	النوع الثانى ص	الكمية المتاحة
ذرة	١	٢	٨٠
قمح	٣	٢	١٢٠
الثمن	١٠	١٢	

∵ س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ٢ ص ⩽ ٨٠ ، ٣ س + ٢ ص ⩽ ١٢٠

، دالة الهدف : ر = ٤ س + ٢ ص

ل١: س + ٢ص = ٨٠

يمر بـ (٠ ، ٤٠) ، (٨٠ ، ٠)

ل٢: ٣س+٢ص= ١٢٠

يمر بـ (٠، ٦٠) ، (٤٠ ، ٠)

منطقة الحل هى .... حيث

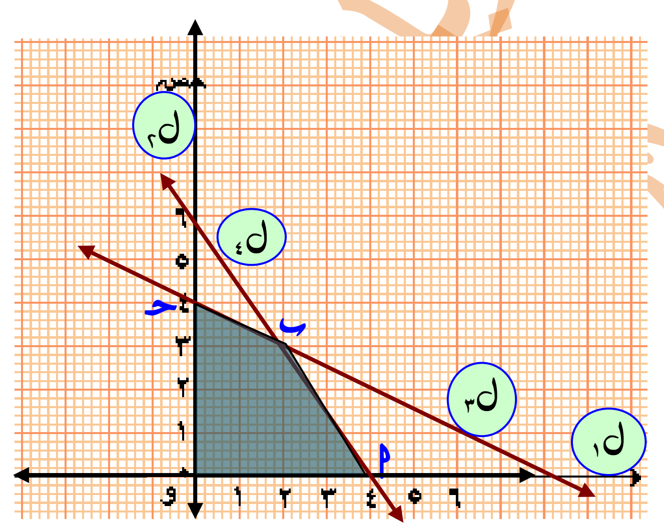
حيث : ﺃ(٤٠ ، ٠) ، ب (٢٠ ، ٣٠) ، جـ(٠ ، ٤٠)

∵ ر = ٤ س + ٢ص

∴ ر ﺃ = ٤ × ٤٠ + ٠ = ١٦٠

، ر ب = ٤× ٢٠ + ٣٠ ×٢ = ١٤٠

، ر جـ = ٠ + ٤٠ × ٢ = ٨٠



∴ أكبر ربح عند ﺃ(٤ ، ٠) بحيث ينتج ٤ أكياس من النوع الأول

تمارين

١ـ عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً ..

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ١٠٠ ، ٢ س + ص ≤ ١٤٠

ـ ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل (ل) أكبر ما يمكن

حيث : ل = ٦ س + ٤ ص

٢ـ عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً .

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ ص ≤ ٦ ، ٣س + ٢ ص ≤ ١٢

ـ ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل (ل) أكبر ما يمكن

حيث : ل = ٦ س + ٤ ص

٣ـ عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً .

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ ص ≤ ١١ ، ٣س + ٢ص ≤ ١٢

ـ ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل (ر) أقل ما يمكن

حيث : ر = ٣٠س + ٥ ص

٤ـ ترزي لديه ٨٠ متر من القطن ، ١٢٠ متر من الصوف ـ ينتج نوعين من الثياب بحيث يلزم لعمل ثوب من النوع الأول متر من القطن ، ٣متر من الصوف ، و للنوع الثاني يلزم متران من كل من القطن ، الصوف ـ و كان ثمن الثوب من النوع الأول ٤٠ جنيه ، و ثمن الثوب من النوع الثاني ٢٠جنيه ـ أوجد عدد الثياب من كل نوع التي يجب أن ينتجها الترزي ليكون دخله اكبر ما يمكن

٥ـ ينتج مصنع نوعين من النجفا، ب ـ وكل نجفة يقوم بتجميعها كهربائي ثم يقوم عامل بدهانها بالبرونز ـ و يأخذ الكهربائي ساعة لتجميع النموذج ا ، و ساعتين لتجميع النموذج ب ـ أما عامل الدهان فيأخذ ٣ساعات لدهان النموذج ا ، ساعة لدهان النموذج ب ـ و يعمل الكهربائي و عامل الدهان ٦ ساعات يومياً ـ فإذا كان المصنع يكسب ٢٠ جنيه من بيع الوحدة من النموذج ا ، ٣٠ جنيه من بيع الوحدة من النموذج ب

ـ فكم عدد النجف الذي يمكن إنتاجه في اليوم ليعطيه أكبر ربح ممكن

٦- سلعتان غذائيتان الأولي بها ٤ وحدات فيتامين و تعطي ٣ سعرات حرارية - و الثانية بها وحدتان فيتامين و تعطي ٥ سعرات حرارية - فإذا كان المطلوب ٢٤ وحدة فيتامين علي الأقل ، ٣٦ سعر حراري علي الأقل .. و كان سعر الوحدة من السلعة الأولي ١٠ قروش ، سعر الوحدة من السلعة الثانية ١٥ قرش

- فما الكمية الواجب شراؤها من كلا السلعتين لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة

٧- مصنع لأنتاج الحلوي لديه ٧٢ كجم من الدقيق ، ١٢٠ كجم من السكر ، و ينتج نوعين من الحلوي - تحتاج الوحدة من النوع الأول ٤كجم دقيق ، ١٢ كجم سكر ، يحتاج إنتاج وحدة من النوع الثاني ٨كجم دقيق ، ٨ كجم سكر - كما يبلغ ربح الوحدة من النوع الأول ٢٥جنيه، ومن النوع الثاني٤٥ جنيه - فما هي الكمية الواجب إنتاجها من كلا النوعين لتحقيق أقصي ربح

٨- يراد وضع نوعين من الكتب علي ا، ب علي رف مكتبه طوله ١٠٢ سم ، و حمولته القصوي ٢٥ كجم . - فإذا كان وزن الكتاب من كلا النوعين هو ١ كجم ، و سمك الكتاب من النوع ا هو ٨سم ، و من النوع ب هو ٦ سم

- أوجد عدد الكتب من كل نوع التي توضع علي الرف بحيث يكون عددها أكبر ما يمكن

٩- ينتج مصنع نوعين من قطع الغيار ا ، ب ، فإذا كان إنتاج قطعة من النوع الأول يلزم تشغيل ماكينتين الأولي لمدة ٣ساعات و الثانية لمدة ٣ساعات - و لأنتاج قطعة من النوع ب يلزم تشغيل الماكينة الأولي لمدة ٤ساعات و الثانية لمدة ساعتين - فإذا كانت الماكينة الأولي لا تعمل أكثر من ٨ساعات يومياً ، و الثانية لاتعمل أكثر من ١٢ ساعة يومياً - و كان المصنع يكسب ٢٤جنيه من كل قطعة من النوع ا، ساعة يومياً - و كان المصنع يكسب ٢٤جنيه من كل قطعة من النوع ا، ٤٠ جنيه من كل قطعة من النوع ب - فأوجد أكبر ربح يمكن أن يحصل عليه المصنع في اليوم الواحد

١٠- مصنع صغير به ١٢ آلة و ٢٠ عامل و كان المصنع ينتج نوعين من السلع فإذا كان إنتاج الوحدة من السلعة (ا) تحتاج إلي آلة واحدة ، و عاملين - و إنتاج وحدة من السلعة (ب) تحتاج ٣ آلات و عاملين - وأن سعر الوحدة من السلعة أ هو ١٠ جنيه ، سعر الوحدة من السلعة ب هو ٢٠ جنيه - المطلوب : تحديد الانتاج الأمثل لهذا المصنع لتحقيق أعلي إيراد ممكن .

١١- طائرة بها ٤ مقاعد للركاب ، فإذا كان راكب الدرجة الأولي يسمح له بحمل ٦٠ كجم و يدفع ٥٠٠٠جنيه ، و راكب الدرجة الثانية يحمل ٢٠كجم و يدفع ٢٥٠٠جنيه إذا كان أكبر وزن للأمتعة هو ١٢٠ كجم .. - فأوجد عدد الركاب من كل درجة الذي يحقق أكبر دخل من الأجور


Math
Math
مذكرة حساب المثلثات
الصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى
منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

مــراجعة لما ســـــبق دراسته

إشارات الدوال المثلثية

كما هو مبين في الشكل
و يجب قبل تحديد إشارة الدالة المثلثية
ثم تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية

الربع الأول " الكل " موجب
الربع الثانى " حا ، قتا " موجب
الربع الثالث " طا ، طتا " موجب
الربع الرابع " حتا ، قا " موجب

$90°$ $\frac{\pi}{2}$ ، $180°$ π ، $270°$ $\frac{3}{2}\pi$ ، صفر $360°$ 2π

أو كالآتى :

إذا كانت θ < تقع فى الربع الأول فإن : حا θ موجبة ، حتا θ موجبة ، طا θ موجبة

إذا كانت θ < تقع فى الربع الثانى فإن : حا θ موجبة ، حتا θ سالبة ، طا θ سالبة

إذا كانت θ < تقع فى الربع الثالث فإن : حا θ سالبة ، حتا θ سالبة ، طا θ موجبة

إذا كانت θ < تقع فى الربع الرابع فإن : حا θ سالبة ، حتا θ موجبة ، طا θ سالبة

الد وال المثلثية للزاويا لبعض الخاصة.

الزاوية / الدالة	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$ ، صفر°
حــا	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	صفر	١ –	صفر
حتــا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	صفر	١ –	صفر	١
طــا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$	غير معرف	صفر	غير معرف	صفر

بعض خواص الدوال المثلثية:

[١] الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين [θ ، $90 - \theta$]

(١) حا θ = حتا $(90° - \theta)$ (٢) حتا هـ = حا$(90° - \theta)$ (٣) طا هـ = طتا$(90° - \theta)$

بالمثل : قتاهـ = قا$(90° - \theta)$ ،، قا هـ = قتا $(90° - \theta)$

ملاحظة : إذا كان حا س = حتا ص فإن س + ص = ٩٠° و بالمثل باقي الدوال

[٢] الدوال المثلثية للزاويتين المتكاملتين [θ ، ١٨٠ − θ]

(١) حا (١٨٠° − θ) = حا θ (٢) حتا (١٨٠° − θ) = − حتا θ (٣) طا (١٨٠° − θ) = − طا θ

[٣] الدوال المثلثية للزاويتين [θ ، ١٨٠ + θ]

(١) حا (١٨٠° + θ) = − حا θ (٢) حتا (١٨٠° + θ) = − حتا θ (٣) طا (١٨٠° + θ) = طا θ

[٤] الدوال المثلثية للزاويتين [θ ، ٣٦٠ − θ]

(١) حا (٣٦٠° − θ) = − حا θ (٢) حتا (٣٦٠° − θ) = حتا θ (٣) طا (٣٦٠° − θ) = − طا θ

ملاحظات (١) لإيجاد دالة أي زاوية معروف قيمتها لابد من تحديد الربع أولاً ثم إختيار زاوية مناسبة من الزوايا ٣٠° ،، ٤٥° ،، ٦٠°

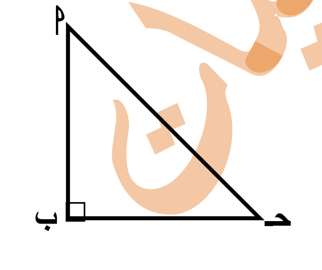
(٢) زوايا الربع الثاني هي : ١٥٠° = ١٨٠° − ٣٠ ، ١٣٥° = ١٨٠ − ٤٥° ، ١٢٠° = ١٨٠ − ٦٠

(٣) زوايا الربع الثالث هي : ٢١٠° = ١٨٠ + ٣٠ ، ٢٢٥° = ١٨٠ + ٤٥ ، ٢٤٠° = ١٨٠ + ٦٠

(٤) زوايا الربع الرابع هي : ٣٣٠° = ٣٦٠ − ٣٠ ، ٣١٥° = ٣٦٠ − ٤٥ ، ٣٠٠° = ٣٦٠ − ٦٠

(٥) حا (− θ) = − حا θ ، حتا (− θ) = حتا θ ، طا (− θ) = − طا θ

الدوال المثلثية للزوايا الحادة . في أي Δ ٦ ب جـ قائم في ب :



يكون حا جـ = $\frac{٦ ب}{٦ جـ}$ $\left(\frac{مقابل}{وتر}\right)$ | قتا جـ = $\frac{٦ جـ}{٦ ب}$ $\left(\frac{وتر}{مقابل}\right)$

،، حتا جـ = $\frac{ب جـ}{٦ جـ}$ $\left(\frac{مجاور}{وتر}\right)$ | قا جـ = $\frac{٦ جـ}{ب جـ}$ $\left(\frac{وتر}{مجاور}\right)$

،، طا جـ = $\frac{٦ ب}{ب جـ}$ $\left(\frac{مقابل}{مجاور}\right)$ | ظتا جـ = $\frac{ب جـ}{٦ ب}$ $\left(\frac{مجاور}{مقابل}\right)$

ملاحظة هامة : يجب مراعاة الربع الذى تقع فيه الزاوية وبالتالى تراعى إشارات الدوال المثلثية

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية

لأى زاوية هـ يكون :

١– حا θ قتا θ = ١ ؛ أ حا θ = $\frac{١}{\text{قتا }\theta}$ ؛ أ قتا θ = $\frac{١}{\text{حا }\theta}$

٢– حتا θ قا θ = ١ ؛ أ حتا θ = $\frac{١}{\text{قا هـ}}$ ؛ أ قا θ = $\frac{١}{\text{حتا }\theta}$

٣– طا θ طتا θ = ١ ؛ أ طا θ = $\frac{١}{\text{طتا }\theta}$ ؛ أ طتا θ = $\frac{١}{\text{طا }\theta}$

٤– طا θ = $\frac{\text{حا }\theta}{\text{حتا }\theta}$ ، طتا θ = $\frac{\text{حتا }\theta}{\text{حا }\theta}$

٥– (م) حتا^٢ θ + حا^٢ θ = ١ ، (ب) ١ + طا^٢ θ = قا^٢ θ ، (حـ) ١ + طتا^٢ θ = قتا^٢ θ

البرهان :

نعلم أنه من دائرة الوحدة : س = حتا θ ، ص = حا θ

، س^٢ + ص^٢ = ١

∴ حتا^٢ θ + حا^٢ θ = ١ ⟵ (م)

بالقسمة على حتا^٢ θ ينتج :

١ + $\frac{\text{حا}^٢ \theta}{\text{حتا}^٢ \theta}$ = $\frac{١}{\text{حتا}^٢ \theta}$

∴ ١ + طا^٢ θ = قا^٢ θ ⟵ (ب)

بالمثل بالقسمة على حا^٢ θ ينتج : ١ + طتا^٢ θ = قتا^٢ θ ⟵ (حـ)

تدريب : أكمل ما يلى :

(١) ١ – حا^٢ θ = ...

(٢) قا^٢ θ – طا^٢ θ = ...

(٣) حا θ · قا θ = ...

(٤) طا α · قتا α = ...

(٥) حا^٢ ٣ θ + ... = ١

(٦) حا^٢ ٤٣° + حتا^٢ ....° = ١

(٧) ١ + طا^٢ ٧٠° = قتا^٢ ....°

(٨) حا^٢ α + حتا^٢ α + طا^٢ α = ...

(٩) (حا^٢ μ + حتا^٢ μ)^٧ = ...

(١٠) إذا كان : طا^٢ θ = ٨ فإن : قا^٢ θ = ...

(١١) إذا كان : طتاθ = ٢ فإن : قتا^٢ θ = ...

مثـ١ـال إثبت صحة المتطابقة $(\text{جا } \theta + \text{جتا } \theta)^2 - 2 \text{ جا } \theta \text{ جتا } \theta = 1$

الحـــــــــــل

الطرف الايمن $= \text{جا}^2 \theta + 2 \text{ جا } \theta \text{ جتا } \theta + \text{جتا}^2 \theta - 2 \text{ جا } \theta \text{ جتا } \theta$

$= \text{جا}^2 \theta + \text{جتا}^2 \theta = 1 =$ الطرف الايسر

مثـ٢ـال إثبت صحة المتطابقة $(\text{جا } \theta + \text{جتا } \theta)^2 - 1 = 2\text{جا } \theta \text{ جتا } \theta$

الحـــــــــــل

الطرف الايمن $= \text{جا}^2 \theta + 2 \text{ جا } \theta \text{ جتا } \theta + \text{جتا}^2 \theta - 1$

$= \text{جا}^2 \theta + \text{جتا}^2 \theta + 2 \text{ جا } \theta \text{ جتا } \theta - 1$

$= 1 + 2 \text{ جا } \theta \text{ جتا } \theta - 1 = 2 \text{ جا } \theta \text{ جتا } \theta =$ الطرف الايسر

مثـ٣ـال إثبت صحة المتطابقة $\text{ظا } \alpha + \text{ظتا } \alpha = \text{قا } \alpha \text{ قتا } \alpha$

الحـــــــــــل

الايمن $= \frac{\text{جا } \alpha}{\text{جتا } \alpha} + \frac{\text{جتا } \alpha}{\text{جا } \alpha} = \frac{\text{جا}^2 \alpha + \text{جتا}^2 \alpha}{\text{جتا } \alpha \text{ جا } \alpha} = \frac{1}{\text{جتا } \alpha \text{ جا } \alpha}$

$= \frac{1}{\text{جتا } \alpha} \times \frac{1}{\text{جا } \alpha} = \text{قا } \alpha \text{ قتا } \alpha =$ الايسر

مثـ٤ـال إثبت صحة المتطابقة $\text{قا}^2 \theta + \text{قتا}^2 \theta = \text{قا}^2 \theta \text{ قتا}^2 \theta$

الحـــــــــــل

الايمن $= \frac{1}{\text{جتا}^2 \theta} + \frac{1}{\text{جا}^2 \theta} = \frac{\text{جا}^2 \theta + \text{جتا}^2 \theta}{\text{جتا}^2 \theta \text{ جا}^2 \theta} = \frac{1}{\text{جتا}^2 \theta \text{ جا}^2 \theta}$

$= \frac{1}{\text{جتا}^2 \theta} \times \frac{1}{\text{جا}^2 \theta} = \text{قا}^2 \theta \text{ قتا}^2 \theta =$ الايسر

مثـ٥ـال إثبت صحة المتطابقة $\frac{2\text{ظا } \theta}{1 + \text{ظا}^2 \theta} = 2 \text{ جا } \theta \text{ جتا } \theta$

الحـــــــــــل

الطرف الايمن $= \frac{2 \text{ ظا } \theta}{\text{قا}^2 \theta} = 2 \times \frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta} \div \frac{1}{\text{جتا}^2 \theta} = 2 \times \frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta} \times \text{جتا}^2 \theta$

= ٢ جا θ جتا θ = الطرف الايسر

مثـ٦ـال　**إثبت صحة المتطابقة** $\frac{١ + ظا^٢ \theta}{١ + ظتا^٢ \theta} = ظا^٢ \theta$

الحـــــــــل

الطرف الايمن = $\frac{قا^٢ \theta}{قتا^٢ \theta} = \frac{١}{جتا^٢ \theta} \div \frac{١}{جا^٢ \theta} = \frac{١}{جتا^٢ \theta} \times جا^٢ \theta$

$= \frac{جا^٢ \theta}{جتا^٢ \theta} = ظا^٢ \theta$ = الطرف الايسر

مثـ٧ـال　**إثبت صحة المتطابقة** جا$^٢ \alpha$ + جا$^٢ \alpha$ ظا$^٢ \alpha$ = ظا$^٢ \alpha$

الحـــــــــل

الطرف الايمن = جا$^٢ \alpha$ (١ + ظا$^٢ \alpha$) = جا$^٢ \alpha$ × قا$^٢ \alpha$ = جا$^٢ \alpha$ × $\frac{١}{جتا^٢ \alpha}$

$= \frac{جا^٢ \alpha}{جتا^٢ \alpha}$ = ظا$^٢ \alpha$ = الطرف الايسر

مثـ٨ـال　**إثبت صحة المتطابقة** ١ + $\frac{١ - جتا^٢ \theta}{١ - جا^٢ \theta} = قا^٢ \theta$

الحـــــــــل

الطرف الايمن = ١ + $\frac{جا^٢ \theta}{جتا^٢ \theta}$ = ١ + ظا$^٢ \theta$ = قا$^٢ \theta$ = الطرف الايسر

مثـ٩ـال　**إثبت صحة المتطابقة** $\frac{جا^٢ \theta}{١ - جا^٢ \theta} = ظا^٢ \theta$

الحـــــــــل

الطرف الايمن = $\frac{جا^٢ \theta}{جتا^٢ \theta}$ = ظا$^٢ \theta$ = الطرف الايسر

مثـ١٠ـال　**إثبت صحة المتطابقة** جتا$^٤ \theta$ - جا$^٤ \theta$ = ١ - ٢ جا$^٢ \theta$

الحـــــــــل

الطرف الايمن = (جتا$^٢ \theta$ + جا$^٢ \theta$) (جتا$^٢ \theta$ - جا$^٢ \theta$)

= ١ × جتا$^٢ \theta$ - جا$^٢ \theta$ = جتا$^٢ \theta$ - جا$^٢ \theta$

= (١ - جا$^٢ \theta$) - جا$^٢ \theta$ = ١ - ٢ جا$^٢ \theta$ = الطرف الايسر

مثـــال ١١ إثبت صحة المتطابقة جتا^4 θ – جا^4 θ = ٢ جتا^2 θ – ١

الحـــــــــــل

الطرف الايمن = (جتا^2 θ + جا^2 θ) (جتا^2 θ – جا^2 θ)

= ١ × جتا^2 θ – جا^2 θ = جتا^2 θ – جا^2 θ

= جتا^2 θ – (١ – جتا^2 θ) = جتا^2 θ – ١ + جتا^2 θ

= ٢ جتا^2 θ – ١

تمـــــــــــــــــارين

إثبت صحة المتطابقات الآتية :

(١) قا^2 θ + قتا^2 θ = قا^2 θ قتا^2 θ

(٢) ظا^2 θ حا^2 θ + حتا^2 θ + ٢ حا^2 θ = قا^2 θ

(٣) حا^4 θ – حتا^4 θ = ٢ حا^2 θ – ١

(٤) حا θ حا (٩٠° – θ) ظتا θ = ١ – حا^2 θ

(٥) ٢ حتا^2 θ – ٣ حا θ قتا θ + ٢ حا^2 θ = – ١

(٦) $\dfrac{\text{١ + ظا}^2\theta}{\text{١ + ظتا}^2\theta}$ = ظا^2 θ

(٦) $\dfrac{\text{١ – حتا}^2\theta}{\text{١ – حا}^2\theta}$ + ١ = قا^2 θ

(٨) $\dfrac{\text{٢ ظا}\,\theta}{\text{١ + ظا}^2\theta}$ = ٢ حا θ حتا θ

(٩) $\dfrac{\text{حا}^2\theta}{\text{١ – حا}^2\theta}$ = ظا^2 θ

(١٠) $\dfrac{\text{حتا}\,\theta\ \text{ظا}\,\theta}{\text{قتا}\,\theta}$ = ١ – حتا^2 θ

(١١) $\dfrac{\text{١ – ظا}^2\theta}{\text{١ + ظا}^2\theta}$ = ٢ حتا^2 θ – ١

(١٢) $\dfrac{\text{قا}\,\theta - \text{حتا}\,\theta}{\text{قتا}^2\theta - \text{ظتا}^2\theta}$ = حا θ ظا θ

(١٣) $\dfrac{\text{حا}\,\theta - \text{٢ حا}^3\theta}{\text{٢ حتا}^3\theta - \text{حتا}\,\theta}$ = ظا θ

(١٤) $\dfrac{\text{حا}^3\theta + \text{حتا}^3\theta}{\text{حا}\,\theta + \text{حتا}\,\theta}$ = ١ – حا θ حتا θ

(١٥) $\dfrac{\text{١ + حا}\,\theta}{\text{١ – حا}\,\theta}$ = (قا θ – ظا θ)^2

حل المعادلات المثلثية

حل المعادلة المثلثية يعنى إيجاد قيم قياسات الزوايا التى تحقق هذه المعادلة

ملاحظة هامة :

* حا θ ∈ [−١ ، ١] ، حتا θ ∈ [−١ ، ١] لجميع قيم هـ الحقيقية

خطوات حل المعادلة المثلثية :

(١) نحدد إشارة الدالة المثلثية ، بالتالى الربع الذى تقع فيه الزاوية ولتكن " θ " كالآتى "

الدالة المثلثية	إشارة الدالة المثلثية	الربع الذى تقع فيه الزاوية	بداية ونهاية الربع	ملاحظات
حا θ	موجبة	الأول	] ٠ ، ٩٠° [أ، ٠ < θ < ٩٠°	أصغر زاوية موجبة
		الثانى	] ٩٠° ، ١٨٠° [أ، ٩٠° < θ < ١٨٠°	أكبر زاوية موجبة
	سالبة	الثالث	] ١٨٠° ، ٢٧٠° [أ، ١٨٠° < θ < ٢٧٠°	أصغر زاوية سالبة
		الرابع	] ٢٧٠° ، ٣٦٠° [أ، ٢٧٠° < θ < ٣٦٠°	أكبر زاوية سالبة
حتا θ	موجبة	الأول	] ٠ ، ٩٠° [أ، ٠ < θ < ٩٠°	أصغر زاوية موجبة
		الرابع	] ٢٧٠° ، ٣٦٠° [أ، ٢٧٠° < θ < ٣٦٠°	أكبر زاوية موجبة
	سالبة	الثانى	] ٩٠° ، ١٨٠° [أ، ٩٠° < θ < ١٨٠°	أصغر زاوية سالبة
		الثالث	] ١٨٠° ، ٢٧٠° [أ، ١٨٠° < θ < ٢٧٠°	أكبر زاوية سالبة
ظا θ	موجبة	الأول	] ٠ ، ٩٠° [أ، ٠ < θ < ٩٠°	أصغر زاوية موجبة
		الثالث	] ١٨٠° ، ٢٧٠° [أ، ١٨٠° < θ < ٢٧٠°	أكبر زاوية موجبة
	سالبة	الثانى	] ٩٠° ، ١٨٠° [أ، ٩٠° < θ < ١٨٠°	أصغر زاوية سالبة
		الرابع	] ٢٧٠° ، ٣٦٠° [أ، ٢٧٠° < θ < ٣٦٠°	أكبر زاوية سالبة

لاحظ أن : ٩٠° = $\frac{\pi}{٢}$ ، ١٨٠° = π ، ٢٧٠° = $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٣٦٠° = ٢ π

(٢) نوجد : ق (∠ θ)

(٣) نوجد : ق (∠ س) كالآتى :

(١) زاوية α تقع فى الربع الأول : ق (∠ α) = ق (∠ θ)

(٢) زاوية α تقع فى الربع الثانى : ق (∠ α) = ١٨٠° − ق (∠ θ)

(٣) زاوية α تقع فى الربع الثالث : ق (∠ α) = ٢٧٠° − ق (∠ θ)

(٤) زاوية α تقع فى الربع الرابع : ق (α) = ٣٦٠° − ق (θ)

مثـ١ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جا θ − ١ = ٠ حيث: ٠° < θ < ٣٦٠°

الحـــــــل

٢جا θ = ١ ∴ جا θ = $\frac{١}{٢}$ موجبة ∴ θ = ٣٠°

θ فى الربع الاول = هـ = θ = ٣٠°

θ فى الربع الثانى = ١٨٠° − θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

م . ح = { ٣٠° ، ١٥٠° }

مثـ٢ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جا θ + $\sqrt{٣}$ = ٠ حيث: θ ∋] ٠° ، ٢π [

الحـــــــل

٢جا θ = − $\sqrt{٣}$ جا θ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ سالبة ∴ هـ = ٣٠°

θ فى الربع الثالث ∴ θ = ١٨٠ + هـ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

θ فى الربع الرابع ∴ θ = ٣٦٠ − هـ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

م . ح = { ٢٤٠° ، ٣٠٠° }

مثـ٣ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جتا θ − ١ = ٠ حيث: θ ∋] ٠° ، ٢π [

الحـــــــل

$\sqrt{٢}$ جتا θ = ١ جتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ هـ = ٤٥°

θ فى الربع الاول ∴ θ = هـ = ٤٥°

θ فى الربع الرابع ∴ θ = ٣٦٠° − هـ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥°

م . ح = { ٤٥° ، ٣١٥° }

مثـ٤ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة $\sqrt{٣}$ ظا θ + ١ = ٠ : ٠° < θ < ٣٦٠°

الحـــــــل

$\sqrt{٣}$ ظا θ = − ١ ظا θ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ∴ هـ = ٣٠°

θ فى الربع الثانى ∴ θ = ١٨٠° − هـ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

θ فى الربع الرابع ∴ θ = ٣٦٠ − هـ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠°

م . ح = {١٥٠ ، ٣٣٠}

مثـ٥ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢جا٢ θ − ١ = ٠ حيث : ٠° < θ < ٣٦٠°

الحــــــــل

٢ جا θ = ١ جا θ = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ هـ = ٤٥°

θ فى الربع الأول ∴ θ = هـ = θ =٤٥° ،

θ فى الربع الثانى= ١٨٠° ـ هـ =١٨٠°ـ٤٥°=١٣٥°

θ فى الربع الثالث= ١٨٠° + هـ =١٨٠° + ٤٥°=٢٢٥° ،

θ فى الربع الرابع=٣٦٠°ـ٤٥°=٣١٥°

م . ح = { ٤٥° ، ١٣٥° ، ٢٢٥° ، ٣١٥° }

مثـ٦ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جتا٢ θ +٥جتا θ + ٢ = ٠ حيث: θ ∈ [٠° ، ٢π]

الحــــــــل

(جتا θ +٢) (٢ جتا θ + ١) = ٠ ∴ جتا θ =$\frac{-١}{٢}$ ∴ هـ = ٦٠° ، أ جتا θ = ـ٢ مرفوض

θ فى الربع الثانى =١٨٠° ـ هـ =١٨٠° ـ ٦٠° = ١٢٠°

θ فى الربع الثالث = ١٨٠° + هـ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

م . ح = { ١٢٠° ، ٢٤٠° }

مثـ٧ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جتا٢ θ − $\sqrt{٣}$ جتا θ = ٠ حيث: θ ∈ [٠° ، ٢π]

الحــــــــل

جتا θ (٢جتا θ ـ $\sqrt{٣}$) = ٠ ⟸ جتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠° ، أ ٢٧٠°

أ، جتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ موجبة ∴ هـ = ٣٠°

θ فى الربع الاول = هـ = θ =٣٠°

θ فى الربع الرابع ∴ θ = ٣٦٠° ـ هـ = ٣٦٠° ـ ٣٠° = ٣٣٠°

م . ح = { ٩٠° ، ٢٧٠° ، ٣٠° ، ٣٣٠° }

مثـ٨ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ظا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠ حيث: θ ∈ [٠° ، ٢π]

الحــــــــل

ظا θ = $\sqrt{٣}$ موجبة ∴ هـ =٦٠°

θ فى الربع الاول ∴ θ = هـ = ٦٠°

θ فى الربع الثالث ∴ θ = ١٨٠° + هـ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

م . ح = {٦٠° ، ٢٤٠° }

مثـ٩ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة جا (٩٠ ـ θ) = ـ ٠,٢٥٣٧ حيث: $\theta \in$] π ، ٢π [

الحـــــــل

جتا θ = ـ ٠,٢٥٣٧ سالبة ∴ هـ = ١٨ / ٧٥°

θ فى الربع الثالث ∴ θ = ١٨٠ + هـ = ١٨٠° + ١٨ / ٧٥° = ١٨ / ٢٥٥°

~~θ فى الربع الثانى~~ م . ح θ = { ١٨ / ٢٥٥° }

مثـ١٠ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جا^{2} θ + ٣ جا θ = ٠ حيث: $\theta \in$] ٠° ، ٢π [

الحـــــــل

جاθ (٢ جا θ + ٣) = ٠

جا θ = ٠ θ = ٠° ، ١٨٠°

جا θ = $\frac{-٣}{٢}$ = ـ ١.٥ مرفوض

م . ح θ = { ٠° ، ١٨٠° }

مثـ١١ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة جتا^{2} θ + ٢ جتا θ = ٠ حيث: $\theta \in$] ٠° ، ٢π [

الحـــــــل

جتاθ (جتا θ + ٢) = ٠

جتا θ = ٠ θ = ٩٠° ، ٢٧٠°

جتا θ = ـ٢ مرفوض م . ح = { ٩٠° ، ٢٧٠° }

مثـ١٢ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة جا θ ـ جتا θ = ٠ حيث: $\theta \in$] ٠° ، ٢π [

الحـــــــل

جا θ = جتا θ بالقسمة على (جتا θ) ظا θ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

θ فى الربع الاول ∴ θ = هـ = ٤٥°

θ فى الربع الثالث ∴ θ = ١٨٠° + هـ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

م . ح = { ٤٥° ، ٢٢٥° }

مثـ١٣ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ظا^{٢} θ ـ ٢ ظا θ ـ ٣ = ٠ حيث: θ ∈] π ، ٢π [

الحــــــل

ظا^{٢} θ ـ ٢ ظا θ ـ ٣ = (ظا θ + ١) (ظا θ ـ ٣) = ٠

ظا θ ـ ٣ = ٠ ⟸ ظا θ = ٣ موجبة ∴ هـ = ٣٤/ ٧١° θ فى الربع الأول (مرفوض)

θ فى الربع الثالث ∴ θ = ١٨٠° + هـ = ١٨٠° + ٣٤/ ٧١° = ٣٤/ ٢٥١°

٢ ظا θ + ١ = ٠ ⟸ ظا θ = ـ ١ سالب ∴ هـ = ٤٥° θ فى الربع الثانى (مرفوض)

θ فى الربع الرابع ∴ θ = ٣٦٠° ـ هـ = ٣٦٠° ـ ٤٥° = ٣١٥°

م . ح ∴ θ = { ٣٤/ ٢٥١° ، ٣١٥° }

مثـ١٤ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جتا^{٢} θ – ٣ جتا θ + ١ = ٠ حيث: θ ∈ [٠° ، ٢π [

الحــــــل

٢ جتا^{٢} س – ٣ جتاس + ١ = (٢ جتا س – ١)(جاس – ١) = ٠

جتاس – ١ = ٠ جتاس = ١ ∴ س = ٠°

٢ جتاس – ١ = ٠ ٢جتا س = ١ جتاس = $\frac{١}{٢}$ موجبة

∴ هـ = ٦٠° θ فى الربع الاول ∴ θ = هـ = ٦٠°

θ فى الربع الرابع ∴ θ = ٣٦٠° ـ هـ = ٣٦٠° – ٦٠° = ٣٠٠°

م . ح ∴ θ = { ٦٠° ، ٣٠٠° ، ٠° }

مثـ٢٠ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جا^{٢} θ – ١ = ٠ حيث: θ ∈ [٠° ، ٢π [

الحــــــل

٢جا^{٢} θ = ١ جا^{٢} θ = $\frac{١}{٢}$ جا θ = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ موجبة هـ = ٤٥°

θ فى الربع الاول ∴ θ = هـ = ٤٥° ، أ θ فى الربع الثانى ∴ θ = ١٨٠° ـ ٤٥° = ١٣٥°

جا θ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ سالبة هـ = ٤٥°

θ فى الربع الثالث ∴ θ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

أ θ فى الربع الرابع ∴ θ = ٣٦٠° ـ ٤٥° = ٣١٥°

م . ح ∴ θ = { ٤٥° ، ١٣٥° ، ٢٢٥° ، ٣١٥° }

الحل العام للمعادلة المثلثية : (١) نوجد قياس الزاوية الحادة هـ التى تحقق المعادلة

(٢) نعين قيمة θ حسب الربع التى تقع فيه

(٣) نضيف عدد من الدورات (٢ ن π) : ن ∈ ص إلى قيم θ لنحصل على الحل العام للمعادلة

مثـال ٢١ أوجد مجموعة الحل العام للمعادلة ظا θ + ١ = ٠

الحـــــــل

ظا θ = ـ١ سالبة في الربع [الثانى – الرابع] ∴ هـ = ٤٥°

θ فى الربع الثانى= ١٨٠° ـ هـ θ =١٨٠° ـ ٤٥° = ١٣٥°

θ فى الربع الرابع =٣٦٠° ـ هـ θ =٣٦٠ ـ ٤٥= ٣١٥°

وبإضافة (ن π) حيث ن ∈ ص إلى أصغر قياس زاوية موجبة (١٣٥°)

م . ح θ = ١٣٥° + ن π = $\frac{٣}{٤}$ π + ن π : ن ∈ ص

مثـال ٢٢ أوجد الحل العام للمعادلة جتا^٢^ θ ـ جتا θ = ٠

الحـــــــل

جتا θ (جتا θ ـ ١) = ٠

∴ جتا θ = ٠° أ، جتا θ = ١

θ = ٩٠° أ، ٢٧٠° وهى تكافئ ـ ٩٠° أ، θ = ٠°

وبإضافة (٢ ن π) حيث ن ∈ ص وبإضافة (٢ ن π) حيث ن ∈ ص

θ = ± ٩٠ + ٢ ن π θ = ٠ + ٢ ن π

∴ الحل العام هو θ = ± ٩٠ + ٢ ن π أ، ٢ ن π : ن ∈ ص

مثـال ٢٣ أوجد مجموعة الحل العام للمعادلة جا θ جتا θ ـ $\frac{١}{٢}$ جا θ = ٠

الحـــــــل

جا θ (جتاس ـ $\frac{١}{٢}$) = ٠

∴ جا θ = ٠ أ، جتا θ = $\frac{١}{٢}$ موجبة

θ = ٠° ، ١٨٠° θ = ٦٠° أ، ٣٠٠° وهى تكافئ ـ ٦٠°

وبإضافة (٢ ن π) حيث ن ∈ ص وبإضافة (٢ ن π) حيث ن ∈ ص

θ = ٢ ن π أ، π + ٢ ن π θ = $\frac{١}{٣}$ π + ٢ ن π

∴ الحل العام هو θ = ٢ن π أ، π + ٢ن π أ، ± ½ π + ٢ن π : ن ∈ ص

مثـ٢٤ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة جا θ جتا θ = ٠ حيث: θ ∈ [٠° ، ٢π]

الحـــل

جا θ = ٠ ∴ θ = ٠° ، ١٨٠°

جتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠° ، ٢٧٠°

م ٠ ح = {٠° ، ١٨٠° ، ٩٠° ، ٢٧٠° }

تدريب : أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان س ∈ [٠ ، ½ π] ، ٢جا θ − ١ = ٠ فإن θ = ...°

(٢) إذا كان س ∈ [٠ ، π] ، ٢جا θ = √٣ فإن θ = ...° أو ....°

(٣) إذا كان س ∈ [٠ ، ٢π] ، ٢جتا θ + ١ = ٠ فإن θ = ...° أو ....°

(٤) إذا كان س ∈ [٠ ، ٢π] ، طا θ + ١ = ٠ فإن θ = ...° أو ....°

(٥) إذا كان س ∈ [٠ ، ٢π] ، جتا θ = ٠ فإن θ = ...° أو ....°

(٦) إذا كان س ∈ [٠ ، ٢π] ، ٢جتا θ + √٢ = ٠ فإن θ = ...° أو ....°

تمـــــارين

إوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

(١) ٢ جا θ + جا θ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، π]

(٢) جتا² θ − جتا θ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢٧٠°]

(٣) جا θ − جتا θ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(٤) جا² θ − جتا² θ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(٥) جتا θ + ٢ جا θ جتا θ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(٦) جا² θ − ٣جتا² θ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(٧) ٢ جا² θ + ٣جا θ − ٢ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(٨) ٣جتا² θ − جتا θ − ٢ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(٩) ٢طا² θ + طا θ − ١ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(١٠) ٣ قا^2 θ − ٤ قا θ − ٤ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

حل المثلث القائم الزاوية

حل المثلث يعنى : إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه المجهولة إذا علم ثلاثة عناصر من عناصره الستة (إحداها على الأقل ضلع)

حالات حل المثلث :

الحالة الأولى : إذا علم طول ضلع وقياس زاوية :

نحسب قياس الزاوية الثالثة كالآتى :

قياس الزاوية الثالثة = ٩٠° − قياس الزاوية الحادة المعلومة

ثم نوجد طول الضلعين الآخرين بإستخدام الطريقة :

طول الضلع المطلوب / طول الضلع المعلوم = نسبة مثلثية لإحدى الزاويتين الحادتين

مثـ١ـال : حل Δ أ ب جـ القائم فى ب والذى فيه ق(∠أ) = ٤٠° ، أ ب = ١٠سم

الحـــــــل

ق(∠جـ) = ٩٠° − ٤٠° = ٥٠°

جا جـ = جا ٥٠° = ١٠ / أ جـ ∴ أ جـ = ١٠ / جا ٥٠° = ١٣ سم

ظا جـ = ظا ٥٠° = ١٠ / ب جـ ∴ ب جـ = ١٠ / ظا ٥٠° = ٨٫٤ سم

مثـ٢ـال : حل Δأ ب جـ القائم الزاوية فى جـ والذى فيه ق(∠ب) = ٢٠° ، أ جـ = ٧سم

الحـــــــل

ق(∠أ) = ٩٠° − ٢٠° = ٧٠°

جا ٢٠° = ٧ / أ ب ∴ أ ب = ٧ / جا ٢٠ = ٢٠٫٤ سم

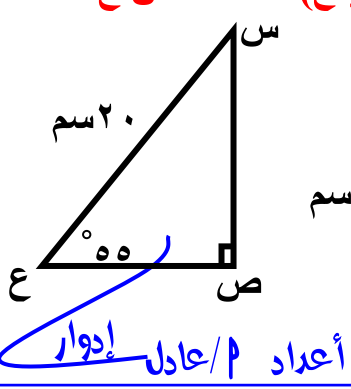
ظا ٧٠° = جـ ب / ٧ ∴ جـ ب = ٧ ظا ٧٠ = ١٩٫٣ سم

مثـ٣ـال : حل Δس ص ع القائم الزاوية فى ص والذى فيه ق(∠ع) = ٥٥° ، س ع = ٢٠سم

الحـــــــل

ق(∠س) = ٩٠° − ٥٥° = ٣٥°

جا ٥٥° = س ص / ٢٠ س ص = ٢٠ جا ٥٥° = ١٦٫٤ سم



ص ع

جتا ٥٥° = ــــــ ب جـ = ٢٠ جتا٥٥° = ١١,٥ سم

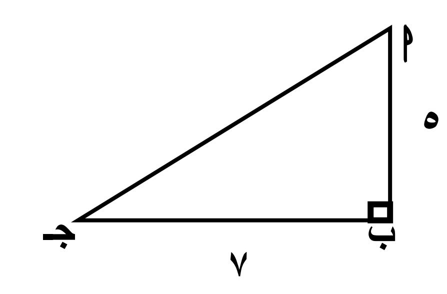
الحالة الثانية : حل المثلث القائم الزاوية بمعلومية ضلعين

إذا علم طولا ضلعين: نحسب قياس أحدى الزاويتين الحادتين كالآتى :

$\frac{\text{طول أحد الضلعين المعلومين}}{\text{طول الضلع الآخر المعلوم}}$ = نسبة مثلثية لإحدى الزاويتين الحادتين

ثم نحسب قياس الزاوية الأخرى ، طول الضلع الثالث بنفس الطريقة فى الحالة الأولى

مثـ٤ـال : حل Δ ٢ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه ٢ ب = ٥سم ، ب جـ = ٧ سم



الحـــــــل

(٢ جـ)^٢ = (٢ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ = ٢٥ + ٤٩ = ٧٤

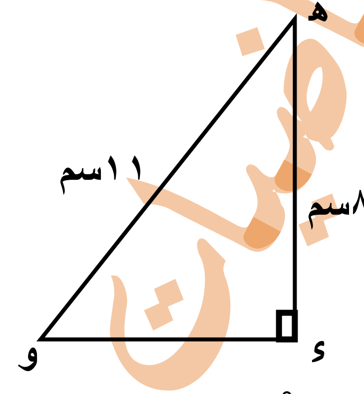
٢ جـ = $\sqrt{٧٤}$ = ٨,٦ سم

ظاجـ = $\frac{٥}{٧}$ ق(< جـ) = ٣٢َ ٣٥°

5 ÷ 7 = sh tan = ,,,,

ق(< ٢) = ٩٠° ـ ق(< جـ) = ٩٠° ـ ٣٢َ ٣٥° = ٢٨َ ٥٤°

مثـ٥ـال : حل المثلث Δ هـ ء و القائم الزاوية فى ء والذى فيه: هـ ء = ٨ سم ، هـ و = ١١ سم



الحـــــــل

(ء و)^٢ = (هـ و)^٢ ـ (هـ ء)^٢ = ١٢١ ـ ٦٤ = ٥٧

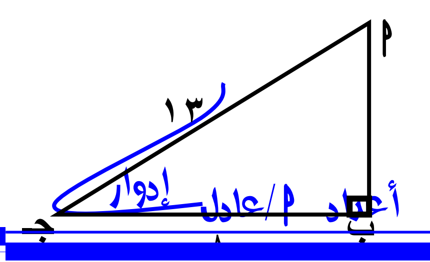
٢ جـ = $\sqrt{٥٧}$ = ٧,٥٥ سم

جا و = $\frac{٨}{١١}$ ق(< و) = ٣٩َ ٤٦°

8 ÷ 11 = sh sin = ,,,

ق(< هـ) = ٩٠° ـ ق(< و) = ٩٠° ـ ٣٩َ ٤٦° = ٢١َ ٤٣°

مثـ٦ـال : حل المثلث Δ ٢ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه ب جـ = ٨سم ، ٢ جـ = ١٣ سم



الحـــــــل

(٢ ب)^٢ = (٢ جـ)^٢ ـ (ب جـ)^٢ = ١٦٩ ـ ٦٤ = ١٠٥

ا جـ = $\sqrt{105}$ = ١٠٫٢٤ سم

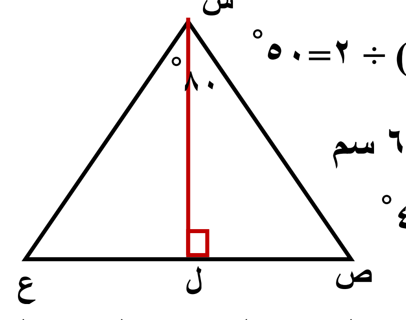
جتاجـ = $\frac{٨}{١٣}$ ق(∠جـ) = ٥٢ ° ١ /

8 ÷ 13 = sh cos = ,,,

ق(∠ا) = ٩٠° ــ ق (∠جـ) = ٩٠° ــ ١ /٥٢° = ٥٩/ ٣٧°

مثـــال٧: حل المثلث س ص ع الذى فيه: س ص = س ع ، ص ع = ١٢ سم ، ق (∠س) = ٨٠°

الحــــــل



∆ متساوى الساقين ∴ ق (∠ع) = ق (∠ص) = (١٨٠° ــ ٨٠°) ÷ ٢ = ٥٠°

س ل ⊥ ص ع ⟸ ل منتصف ص ع ∴ ص ل = ل ع = ١٢ ÷ ٢ = ٦ سم

س ل ينصف ∠ص س ع ∴ ق (∠ص س ل) = ق (∠ع س ل) = ٤٠°

جا ٤٠° = $\frac{٦}{\text{س ص}}$ س ص = $\frac{٦}{\text{جا ٤٠°}}$ = ٩٫٣ سم

∴ حل ∆ س ص ع

س ص = ٩٫٣ سم	س ع = ٩٫٣ سم	ص ع = ١٢ سم
ق (∠ع) = ٥٠°	ق (∠ص) = ٥٠°	ق (∠س) = ٨٠°

تمـــــارين

حل المثلث س ص ع القائم الزاوية فى ص فى الحالات الآتية :

(١) ق (∠ع) = ٣٢° ، س ع = ٢٥ سم

(٢) ق (∠ع) = ١٥ / ٥٤° ، ص ع = ٢٠ سم

(٣) ق (∠س) = ٤٢° ، س ع = ٢٤ سم

(٤) س ص = ٢٧ سم ، ص ع = ٢٠ سم

(٥) س ص = ١١٫٦ سم ، س ع = ١٨٫٦ سم

(٦) س ص = ١٦٫٣ سم ، ص ع = ٢٥ سم

(٧) ا ب حـ مثلث فيه ق (∠ب) = ٥٨° ، ب حـ = ١٥ سم ، رسم ا ء ⊥ ب حـ يقطعه فى ء حيث ا ء = ١٠ سم أوجد : ق (∠حـ)

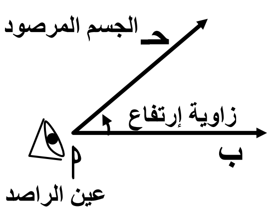
(٨) ا ب حـ ء مستطيل فيه ا حـ = ٢٥ سم ، ق (∠حـ ا ب) = ٢٣° أوجد : طول كل من ا ب ، ب حـ

(٩) ا ب حـ ء معين فيه ا حـ = ١٨.٨ سم ، ب ء = ٢٥ سم أوجد :

ق (∠ أ ء حـ) ، طول $\overline{ب حـ}$

تطبيقات على حل المثلث
زوايا الإرتفاع و الإنخفاض

زاوية الإرتفاع :



إذا فرض أن الراصد عند أ ، الجسم المرصود عند حـ أ على مستوى النظر فإن الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{أ ب}$ الأفقى ، $\overleftarrow{أ حـ}$ الواصل بين عين الراصد و الجسم المرصود تسمى :

زاوية إرتفاع الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة أ

زاوية الإنخفاض :

عين الراصد، أ، ب، زاوية إنخفاض، الجسم المرصود حـ

إذا فرض أن الراصد عند أ ، الجسم المرصود عند حـ أسفل مستوى النظر فإن الزاوية المحصورة بين أ $\overleftarrow{ب}$ الأفقى ، أ $\overleftarrow{حـ}$ الواصل بين عين الراصد و الجسم المرصود تسمى :

زاوية إنخفاض الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة أ

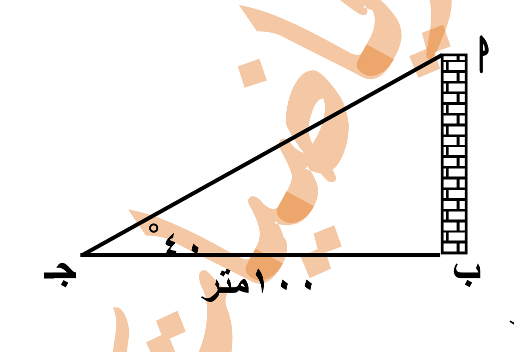
ملاحظة :

أ، ب، زاوية إنخفاض، زاوية إرتفاع، حـ، ء

قياس زاوية إنخفاض حـ بالنسبة لنقطة أ يساوى قياس زاوية إرتفاع أ بالنسبة لنقطة حـ

لأن : ق (∠ أ) = ق (∠ حـ) بالتبادل

مثــ١ــال : من نقطة على بُعد ١٠٠ متر . من قاعدة برج قيست زاوية أرتفاع قمة البرج فكانت ٤٠° أوجد أرتفاع البرج لاقرب متر



الحـــــــل

ظا ٤٠° = $\frac{أ ب}{١٠٠}$

الأرتفاع = البعد × ظل زاوية الأرتفاع

أرتفاع البرج أ ب = ١٠٠ ظا ٤٠° = ٨٣٫٩ ≃ ٨٤ متر

مثــ٢ــال : من نقطة على بُعد ٥٠ متر من قاعدة منزل قيست زاوية أرتفاع قمة المنزل فكانت ٢٣° أوجد أرتفاع المنزل لاقرب متر

أ، ب، جـ، ٢٣°، ٥٠م

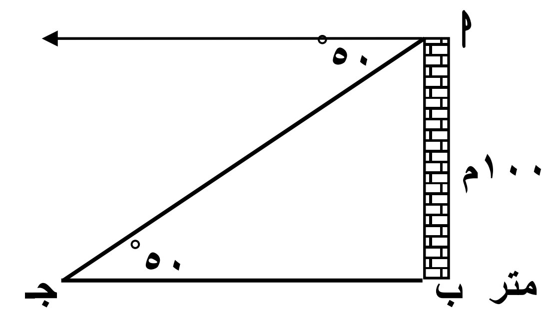
الحـــــــل

∵ ظا٢٣° = $\frac{أ ب}{٥٠}$

الأرتفاع = البعد × ظل زاوية الأرتفاع

أرتفاع المنزل ؟ ب = ٥٠ ظا ٢٣° = ٢٢,٢١ ≃ ٢١ متر

مثــ٣ــال : من قمة برج أرتفاعه ١٠٠ متر قيست زاوية أنخفاض سيارة واقفة فى الشارع فكانت ٥٠° . أوجد بُعد السيارة عن قاعدة البرج

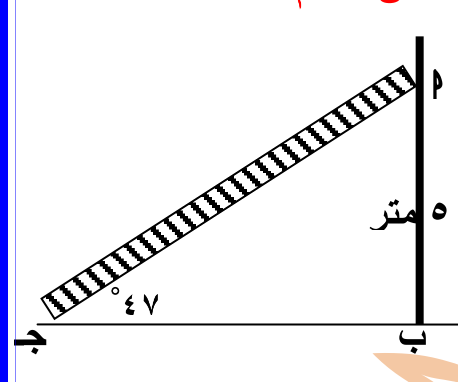


الحـــــــل

ظا٥٠° = ١٠٠ / ب جـ

البعد = الأرتفاع / ظل زاوية الأنخفاض ∴ ب جـ = ١٠٠ / ظا٥٠ ≃ ٨٤ متر

مثــ٤ــال سلم يستد بطرفه العلوى على حائط رأسى أرتفاعه ٥ متر فإذا كان السلم يصنع مع الأرض زاوية قياسها ٤٧° أوجد طول السلم

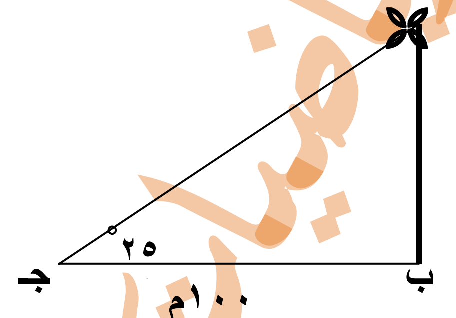


الحـــــــل

جا جـ = ؟ ب / ؟ جـ   جا٤٧° = ٥ / ؟ جـ

طول السلم ؟ جـ = ٥ / جا ٤٧° = ٦,٨٣٧ متر

مثــ٤ــال : طفل يمسك بيده بخيط مربوط فى طرفه الاخر طائرة ورقية فإذا كان طول الخيط ١٠٠ متر أوجد أرتفاع الطائرة عن سطح الارض (مع أهمال طول الطفل) علماً بأن الخيط يصنع مع الافقى زاوية قياسها ٢٥°



الحـــــــل

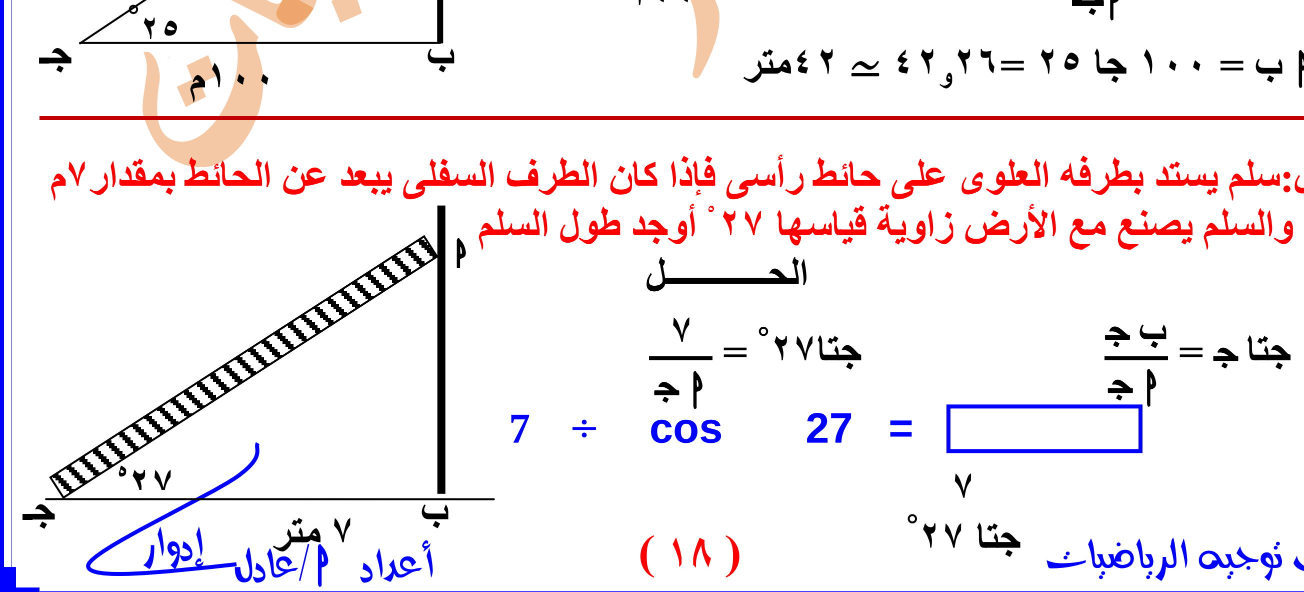
جا ٢٥° = ؟ ب / ؟ جـ   جا ٢٥° = ؟ ب / ١٠٠

؟ ب = ١٠٠ جا ٢٥ =٤٢,٢٦ ≃ ٤٢متر

مثــ٥ــال:سلم يستد بطرفه العلوى على حائط رأسى فإذا كان الطرف السفلى يبعد عن الحائط بمقدار٧م والسلم يصنع مع الأرض زاوية قياسها ٢٧° أوجد طول السلم

الحـــــــل

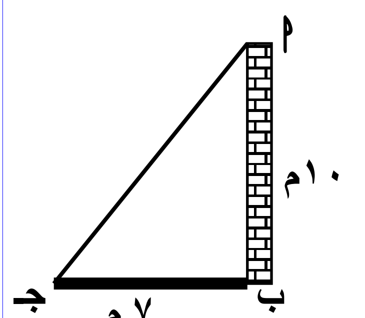
جتا جـ = ب جـ / ؟ جـ   جتا٢٧° = ٧ / ؟ جـ



٧ / جتا ٢٧°

طول السلم ا جـ = ـــــــ = ٧٫٨٦ ≃ ٨ متر

مثـ٦ـال : عمود من أعمدة الأنارة أرتفاعه ١٠م يلقى ظلاً على الارض طوله ٧م أوجد زاوية ارتفاع الشمس عند هذه اللحظة



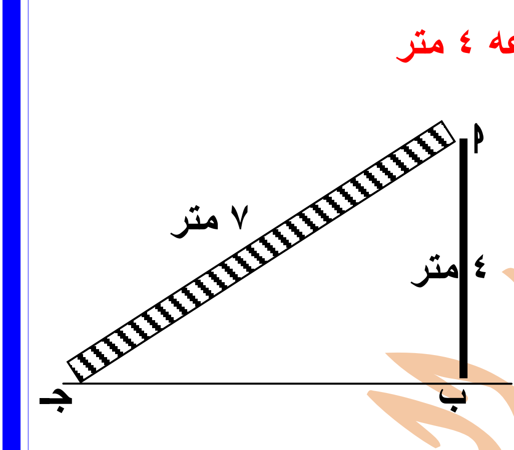
الحـــــــل

ظاجـ = ا ب / ب جـ = ١٠ / ٧

10 ÷ 7 = sh tan = ,,,

∴ زاوية أرتفاع الشمس عن الأرض ق(∠جـ) = ٥٥°

مثـ٧ـال : سلم طوله ٧ متر يستند بطرفه العلوى على حائط أرتفاعه ٤ متر أوجد قياس زاوية ميل السلم على الارض



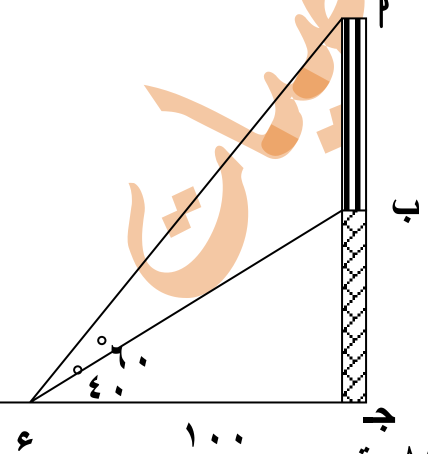
الحـــــــل

جاجـ = ا ب / ا جـ = ٤ / ٧

4 ÷ 7 = sh sin = ,,,

∴ زاوية ميل السلم على الارض ق(جـ) = ٥٠َ ٣٤°

مثـ٨ـال : سارية علم مثبتة فوق سطح مبنى أرتفاعه ومن نقطة على سطح تبعد ١٠٠ مترعن المبنى وُجد أن قياس زاويتى أرتفاع قمة وقاعدة السارية ٦٠°، ٤٠° على الترتيب أوجد طول السارية ٠



الحـــــــل

فى Δ ا جـ ء

ظا٦٠ = ا جـ / ١٠٠ ا جـ = ١٠٠ ظا٦٠ = ١٧٣٫٢ م

فى Δ ب جـ ء

ظا٤٠ = ب جـ / ١٠٠ ب جـ = ١٠٠ ظا٤٠ = ٨٣٫٩ م

أرتفاع السارية = ا ب = ا جـ - ب جـ = ١٧٣٫٢ ـ ٨٣٫٩ ≃ ٨٩ متر

مثـ٩ـال : من قمة صخرة أرتفاعها ١٠٠ متر . رصد شخص سفينتين فى مستوى أفقى واحد فوجد أن قياس زاويتى أنخفاضهما ٥٠° ، ٣٥° أوجد البعُد بين السفينتين .

الحـــــل

فى Δ أ جـ ب　　ظا ٥٠° = $\frac{١٠٠}{\text{ب جـ}}$

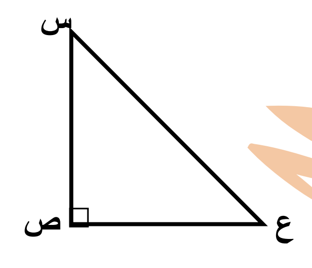
ب جـ = $\frac{١٠٠}{\text{ظا ٥٠°}}$ = ٨٣٫٩ م

فى Δ أ ب ء　　ظا ٣٥° = $\frac{١٠٠}{\text{ب ء}}$

ب ء = $\frac{١٠٠}{\text{ظا ٣٥°}}$ = ١٤٢٫٨ م

البُعد بين السفينتين = جـ ء = ب ء – ب جـ = ١٤٢٫٨ – ٨٣٫٩ = ٥٨٫٩ ≃ ٥٩ متر

تدريب : من نقطة على سطح الأرض تبعد ٣١ متر من قاعدة برج رصد شخص زاوية إرتفاع برج فوجدها ٤٣° أوجد إرتفاع البرج لأقرب متر



الحـــــل

نرسم المثلث س ص ع حيث : س ص يمثل إرتفاع البرج ، ع تمثل عين الراصد

$\frac{\text{س ص}}{\text{ص ع}}$ = ...　　∴ $\frac{\text{س ص}}{.......}$ = ظا ....°

∴ س ص " إرتفاع البرج " = ... × .... = ... سم

تمـــــــارين

(١) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٢١ متر من قاعدة برج رصد شخص زاوية إرتفاع برج فوجدها ٤٣° أوجد إرتفاع البرج لأقرب متر

(٢) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٨٠ متر من قاعدة برج رصد شخص زاوية إرتفاع برج فوجدها ٤٧َ ٣٥° أوجد إرتفاع البرج لأقرب متر

(٣) من قمة فنار إرتفاعه ١٠٠ متر رُصد قارب فوجد أن زاوية إنخفاضه ١٠َ ٢٠°

أوجد بعد القارب عن قاعدة الفنار أقرب متر

(٤) من قمة برج إرتفاعه ٥٠ متر قيست زاوية إنخفاض سيارة فكانت ٢٥َ ٢٠ْ

أوجد بعد السيارة عن قاعدة البرج أقرب متر

(٥) عمود من أعمدة البرق إرتفاعه ٦ متر يلقى ظلاً على الأرض طوله ٤ متر

أوجد قياس زاوية إرتفاع الشمس عندئذ

(٦) من قمة برج قيست زاوية إنخفاض سيارة فكانت ١٢ْ فإذا كان بعد السيارة عن قاعدة البرج ٤٠ متر أوجد إرتفاع البرج لأقرب متر

(٧) يسير شخص على طريق منحدر يميل على سطح الأرض بزاوية قياسها ٤٨َ ١٢ْ

فإذا سار مسافة ٢ كيلو متر أوجد إرتفاعه عن سطح الأرض حينئذ لأقرب متر

(٨) سلم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى وبطرفه الآخر على أرض أفقية ويبعد طرفه السفلى عن الحائط بمقدار ١.٣ متر فإذا كان قياس زاوية ميل السلم على الأرض ٧٠ْ أوجد طول السلم

(٩) رصد شخص طائرة على إرتفاع ١٥٠٠ متر من سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية إرتفاعها ٣٥َ ٤٥ْ أوجد بعد الشخص عن الطائرة لأقرب متر

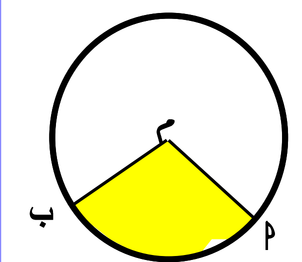
(١٠) من نقطة على بعد ٣٠ متر من قاعدة منزل قيست زاوية إرتفاع أعلى نقطة فيه فكان قياسها ٣٦َ ٣٦ْ أوجد إرتفاع المنزل لأقرب متر ، وإذا سرنا نحو المنزل مسافة ١٠ أمتار فكم يصبح قياس زاوية الإرتفاع عندئذ

(١١) من نقطة على بعد ١٠٠ متر من قاعدة مئذنة قيست زاوية إرتفاع قمة المئذنة فكان قياسها ١٧َ ٣٢ْ أوجد إرتفاع المئذنة لأقرب متر ، وإذا إبتعدنا عن المئذنة مسافة ١٥٠ متر فكم يصبح قياس زاوية إرتفاع قمة المئذنة عندئذ

(١٢) قيست زاوية إرتفاع قمة برج لم يكتمل بناؤه من نقطة على بعد ١٠٠ متر من قاعدة البرج فكانت ٣٠ْ ، كم متراً يجب أن ترتفعها قمة البرج حتى يصبح قياس زاوية إرتفاعها من نفس النقطة ٤٥ْ لأقرب متر



القطاع الدائرى والقطعة الدائرية



القطاع الدائرى هو :

جزء من سطح دائرة محدود بقوس من الدائرة ،

و نصفى القطرين المارين بطرفى هذا القوس

محيط القطاع = ٢ نق + ل

حيث نق طول نصف قطر دائرة القطاع ، ل طول قوس القطاع

مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ هـ نق^٢ = $\frac{س}{٣٦٠°}$ × مساحة دائرة القطاع

حيث هـ زاوية القطاع المركزية بالتقدير الدائرى

، س° زاوية القطاع المركزية بالتقدير الستينى

، هـ = $\frac{ل}{نق}$

مثــ١ــال : قطاع دائرة طول نصف قطر دائرته ٦سم يحصر قوساً طوله ٥ سم أوجد محيطه ومساحته

الحــــــــل

محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ٦ + ٥ = ١٢ +٥ = ١٧ سم

مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ نق × ل = $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٥ = ١٥ سم^٢

مثــ٢ــال : قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ١,٥ وطول نصف قطر دائرته ٤ سم أوجد محيطه ومساحته

الحــــــــل

ل = هـ × نق = ١,٥ × ٤ = ٦ سم

محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ٤ + ٦ = ٨ +٦ = ١٤سم

مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ نق × ل = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٦ = ١٢ سم^٢

مثـ٣ـال : قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٥٠° وطول نصف قطر دائرته ٦ سم
أوجد محيطه ومساحته .

الحـــــــل

هـ ء = $\frac{٥٠ \times \pi}{١٨٠}$ = ٠٫٨٧ ء   نق = ٦سم

ل = هـ ء × نق = ٠٫٨٧ × ٦ = ٥٫٢٢ سم

محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ٦ + ٥٫٢٢ = ١٧٫٢٢ سم

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق × ل = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٥٫٢٢ = ١٥٫٦٦ سم

مثـ٤ـال : قطاع دائرى قياس زاويته المركزية = ٦٠° ومساحة دائرته = ١٥سم^{٢}
أوجد مساحة القطاع

الحـــــــل

مساحة القطاع = $\frac{\theta}{٣٦٠°}$ × مساحة الدائرة = $\frac{٦٠°}{٣٦٠°}$ × ١٥ = ٢٫٥ سم^{٢}

مثـ٥ـال : قطاع دائرى قياس زاويته المركزية = ١٫٥ ء ومساحة دائرته = ٦π سم^{٢}
أوجد مساحة القطاع

الحـــــــل

مساحة القطاع = $\frac{هـ ء}{٢\pi}$ × مساحة الدائرة = $\frac{١٫٥ ء}{٢\pi}$ × ٦π = ٤٫٥ سم^{٢}

مثـ٦ـال : قطاع دائرى محيطه ٢٠سم وطول نصف قطر دائرته = ٦سم أوجد مساحته

الحـــــــل

∵ محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢٠

٢ × ٦ + ل = ٢٠

١٢ + ل = ٢٠   ∴ ل = ٢٠ ـ ١٢ = ٨ سم

∴ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق × ل = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم

مثـ٧ـال : قطاع دائرى محيطه ٢٠سم وطول قوسه = ٦سم أوجد مساحته .

الحـــــــل

∵ محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢٠

٢نق = ٢٠ ـ ٦ = ١٤ ∴ نق = ٧ سم

∴ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق × ل = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٧ = ٢١ سم

مثـ٨ـال : قطاع دائرى قياس زاويته المركزية = ١٫٥ ً ومحيطه = ٣٥سم أوجد مساحته

الحـــــــل

∵ ل = هـ ً × نق ∴ ل = ١.٥ نق

∵ محيط القطاع = ٢نق + ل = ٣٥

= ٢نق + ١٫٥ نق = ٣٥

٣٫٥ نق = ٣٥ ∴ نق = ١٠ سم

∴ ل = ١٫٥ × ١٠ = ١٥ سم

∴ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ × نق × ل = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٥ = ٧٥ سم^{٢}

مثـ٩ـال : قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٢٫٢ ً وطول قوسه = ١١ سم أوجد محيطه ومساحته

الحـــــــل

نق = $\frac{ل}{هـ ً}$ = $\frac{١١}{٢٫٢}$ = ٥سم

محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ٥ +١١ = ١٠ +١١ = ٢١ سم

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق ل = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١١ = ٢٧٫٥ سم^{٢}

مثـ١٠ـال : قطاع دائرى مساحته ٣٠ سم^{٢} وطول نصف قطر دائرته = ١٠سم . أوجد محيطه

الحـــــــل

∵ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق × ل = ٣٠

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ل = ٣٠ ٥ ل = ٣٠

∴ ل = $\frac{٣٠}{٥}$ = ٦ سم

∴ محيط القطاع = ٢ نق + ل= ٢ × ١٠ + ٦= ٢٠ +٦ = ٢٦ سم

مثـ١١ـال : قطاع دائرى مساحته ٤٠ سم^2 يحصر قوساً طوله = ١٠سم أوجد محيطه

الحـــــــل

∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ نق × ل = ٤٠

∴ $\frac{1}{2}$ × نق × ١٠ = ٤٠ ∴ نق = $\frac{40}{5}$ = ٨سم

محيط القطاع = ٢نق + ل = ٢ × ٨ + ١٠ = ١٦+١٠ = ٢٦ سم

مثـ١٢ـال قطاع دائرى يحصر قوساً طوله يساوى ضعف طول نصف قطر دائرته ومحيطه = ٢٤ سم أوجد مساحته

الحـــــــل

∵ ل = ٢ نق

∵ محيط القطاع = ٢نق + ل = ٢٤

٢نق +٢نق = ٢٤ ٤ نق = ٢٤

∴ نق = ٦سم ، ∴ ل = ٢ × ٦ = ١٢سم

∴ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ نق × ل = $\frac{1}{2}$ × ٦ × ١٢ = ٣٦ سم^2

مثـ١٣ـال :قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٠,٦ ^ء^ ومساحته ٣٠سم^2 أوجد محيطه

الحـــــــل

∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ هـ^ء^ × نق^2 = ٣٠

= $\frac{1}{2}$ × ٠.٦ × نق^2 = ٠.٣ نق^2 = ٣٠

نق^2 = $\frac{30}{0.3}$ = ١٠٠ ∴ نق = $\sqrt{100}$ = ١٠سم

∴ ل = هـ^ء^ × نق = ٠.٦ × ١٠ = ٦ سم

∴ محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ١٠ + ٦ = ٢٠ + ٦ = ٢٦ سم

مثـ١٤ـال : قطاع دائرى محيطه = ١٤سم ومساحته = ١٢ سم^2 أوجد أبعاده

الحـــــــل

∵ محيط القطاع = ٢ نق + ل = ١٤ ∴ ل = ١٤ ـ ٢ نق

∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ نق × ل = ١٢ ∴ نق × ل = ٢٤

نق (١٤ ـ ٢ نق) = ٢٤

ـ ٢ نق^2 + ١٤ نق ـ ٢٤ = ٠ ÷٢

نق^2 ـ ٧ نق +١٢ =(نق ـ ٣)(نق ـ ٤) = ٠

∴نق = ٣ أ، نق = ٤

∴ل= ١٤ ـ ٢ × ٣ = ١٤ ـ ٦ = ٨ أ، ل = ١٤ ـ ٢ × ٤ = ١٤ ـ ٨ = ٦سم

تدريب : أكمل ما يأتى :

(١) محيط القطاع الذى طول نصف قطر دائرته ٤ سم وطول قوسه ٥ سم = ...

(٢) مساحة القطاع الذى طول نصف قطر دائرته ٤ سم وطول قوسه ٥ سم = ...

(٣) قطاع دائرى محيطه ١٦ سم ، طول قوسه ٤ سم يكون طول نصف قطر دائرته = ...

(٤) قطاع دائرى محيطه ١٨ سم ، طول قطر دائرته ١٠ سم يكون طول قوسه = ...

(٥) قطاع دائرى مساحته ١٨ سم^2 ، طول قطر دائرته ٨ سم يكون طول قوسه = ...

(٦) قطاع دائرى مساحته ١٢ سم^2 ، طول قوسه ٦ سم يكون طول قطر دائرته = ...

القطعة الدائرية



القطعة الدائرية هى :

جزء من سطح دائرة محدود بقوس من الدائرة ووتراً ماراً بنهايتى ذلك القوس

م
ب أ
قطعة صغرى

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^2 (هـ^{ء} ـ حا هـ$^{\circ}$)

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى أى ضلعين متجاوريين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

ملاحظة : إذا كان المطلوب مساحة القطعة الكبرى

نلاحظ أن قياس زاوية القطعة الكبرى = ٣٦٠° ـ هـ^{ء}

كما يمكن إيجاد مساحة القطعة الكبرى بطرح مساحة القطعة الصغرى من مساحة الدائرة

مثـ١ــال : أوجد مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها المركزية = ١٢٠° وطول نصف قطر دائرتها = ١٠سم

الحــــــــل

هـ ^ء^ = $\frac{١٢٠° \times \pi}{١٨٠°}$ = ٢,١ ^ء^

مساحة القطعة = $\frac{١}{٢}$ نق^٢^ (هـ ^ء^ – جا هـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ (٢,١ – جا١٢٠°)

= ٥٠ (٢,١ – جا ١٢٠°) = ٦١,٧ سم^٢^

مثـ٢ــال : أوجد مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها المركزية = ١,٢ ^ء^ وطول نصف قطر دائرتها = ٨سم

الحــــــــل

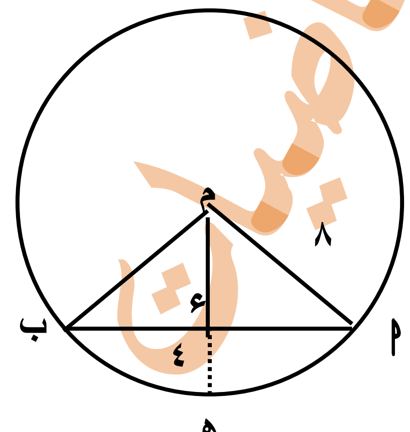
هـ° = $\frac{١,٢ \times ١٨٠°}{\pi}$ = ٦٩°

مساحة القطعة = $\frac{١}{٢}$ نق^٢^ (هـ ^ء^ – جا هـ°)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ (١,٢ ^ء^ – جا٦٩°) = ٨,٥ سم^٢^

مثـ٣ــال : أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٨سم وأرتفاعها = ٤ سم

الحــــــــل



م هـ = نق = ٨ سم

م ء = ٨ – ٤ = ٤ سم

جتا(∠ ء م ء) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق (∠ ء م ء) = ٦٠°

∴ ق (∠ ء م ب) = ٢ × ٦٠° = ١٢٠°

هـ ^ء^ = $\frac{١٢٠° \times \pi}{١٨٠°}$ = ٢,١ ^ء^

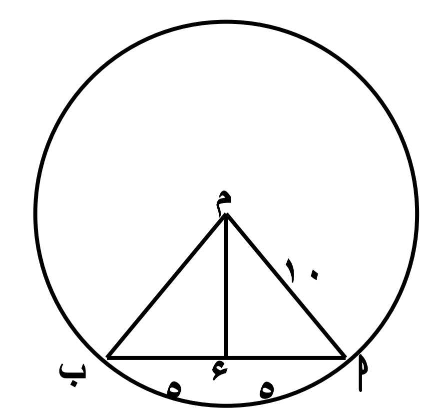
∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢^ (هـ ^ء^ – جا هـ°)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ (٢,١ ^ء^ – جا١٢٠°) = ٣٩,٣ سم^٢^

مثـ٤ـال : أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول نصف قطر دائرتها يساوى طول وترها = ١٠سم



الحـــــــل



أ ء = ء ب = ٥ سم جا(< أ م ء) = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق (< أ م ء) = ٣٠°

∴ ق (< أ م ب) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

∴ ق (< أ م ب) المنعكسة = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

هـ ً = $\frac{٣٠٠° \times \pi}{١٨٠°}$ = ٥٫٢٣٥ ً

∴ مساحة القطعة الدائرية الكبرى = $\frac{١}{٢}$ نق² (هـ ً − جا هـ°)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ (٥٫٢ ً − جا٣٠٠°) = ٥٠ (٥٫٢ ً − جا٣٠٠°) = ٣٠٣ سم²

تمـــــــارين

(١) أوجد محيط ومساحة قطاع دائرى طول قوسه ٧ سم ، وطول نصف قطر دائرته ١٠ سم

(٢) أوجد مساحة قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ١.٤ ً وطول قطر دائرته ١٨ سم

(٣) أوجد مساحة قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ١٣٥° وطول قطر دائرته ١٤ سم

(٤) قطاع دائرى مساحته ٥ سم² ، وطول قطر دائرته ٢ سم أوجد طول قوس القطاع

(٥) قطاع دائرى مساحته ٥٦ سم² ، وطول قوسه ١٤ سم أوجد محيط القطاع

(٦) قطاع دائرى مساحته ٢٥ سم² ، وقياس زاويته المركزية ٠.٥ ً أوجد محيط القطاع

(٧) قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٣٠° ، طول قوسه ٣.٥ سم أوجد مساحته

(٨) قطاع دائرى محيطه ٢٨ سم ، و طول نصف قطر دائرته ٧ سم أوجد مساحته ، قياس زاويته بالتقدير الستينى لأقرب درجة

(٩) قطاع دائرى محيطه ٨٨ سم ، و طول قوسه ٣٢ سم أوجد مساحته ، و قياس زاويته بالتقدير الستينى لأقرب درجة

(١٠) قطاع دائرى محيطه ١٢ سم ، و مساحته ٨ سم^2 أوجد طول قطر دائرته ، وقياس زاويته بالتقدير الستينى لأقرب درجة

(١١) دائرة مساحة سطحها ٢٥ ط سم^2 أوجد مساحة قطاع دائرى منها قياس زاويته المركزية ١.٥^{ء} لأقرب سم^2

(١٢) دائرة مساحة سطحها ٣٠٠ سم^2 أوجد قياس الزاوية المركزية لقطاع دائرى منها مساحته ١٠٠ سم^2 بالتقدير الستينى

(١٣) وتر فى دائرة طوله ٢٠ سم يقابل زاوية محيطية قياسها ٦٠° أوجد مساحة القطاع الدائرى

(١٤) أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ١٢٠° لأقرب سم^2

(١٥) أوجد مساحة قطعة دائرية طول قطر دائرتها ٢٤ سم وقياس الزاوية المحيطية المقابلة لها ٥٠° لأقرب سم^2

(١٦) أوجد مساحة قطعة دائرية طول قطر دائرتها ٢٠ سم ، وطول قوسها ٢٦ سم لأقرب سم^2

(١٧) أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها = طول وترها = ١٠ سم لأقرب سم^2

(١٨) أوجد مساحة قطعة دائرية طول إرتفاعها ٤ سم ، وطول وترها ١٦ سم لأقرب سم^2

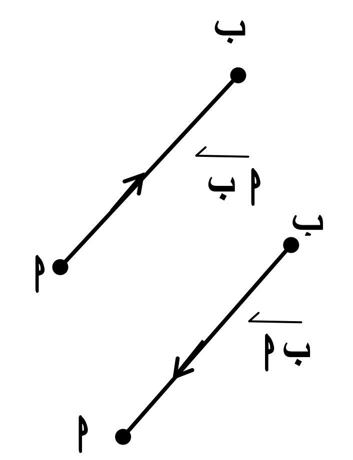
(١٩) قطاع دائرى طول قطر دائرته ٢٠ سم ، ومساحته ١٠٠ سم^2 أوجد مساحة القطعة الدائرية المشتركة معه فى نفس القوس لأقرب سم^2

(٢٠) وتران متساويان فى الطول فى دائرة طول كل منهما ١٢ سم ويحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° أوجد مساحة الجزء المحصور بين هذين الوترين


Math
Math
مذكرة الهندسة التحليلية
الصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى
منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

المتجـــــــهات

تعريف (١) القطعة المستقيمة الموجهة (أ ب)



هى قطعة مستقيمة بدايتها النقطة أ ونهايتها النقطة ب

القطعة المستقيمة الموجهة تتحدد بثلاث عناصر هى

(١) نقطة البداية   (٢) نقطة النهاية

(٣) الاتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية

ملاحظات : –

أ ب = ب أ بينما أ ب ≠ ب أ لاختلافهما فى نقطتى البداية ونقطتى النهاية

تعريف (٢) متجهة الموضع :

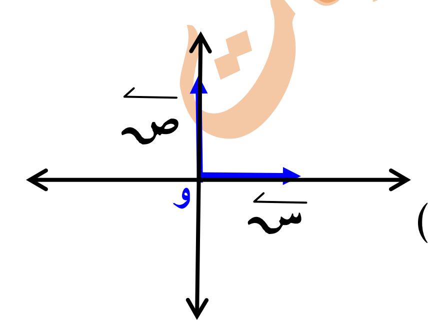
(١) القطعة المستقيمة الموجهة و أ تسمى متجة الموضع للنقطة أ (س ، ص)

(٢) متجة الموضع و أ يقال أنه تمثيل هندسى للمتجة ج = (س ، ص)


كل متجه ج = (س ، ص) ∈ ح² يمكن تمثيله هندسياً بالعديد من القطع المستقيمة الموجة

المتكافئة والتى كل منها تكافئ متجة الموضع للنقطة أ = (س ، ص)

تعريف (٣) متجهى الوحده الأساسيين :



(١) متجه الوحدة الأساسى س هو القطعة المستقيمة الموجة التى مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الأتجاه الموجب لمحور السينات أى أن س = (١ , ٠)

(٢) متجه الوحدة الأساسى ص هو القطعة المستقيمة الموجة التى مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الأتجاه الموجب لمحور الصادات أى أن ص = (٠ , ١)

تعريف (٤) تكافؤ قطعتين مستقيمين موجهتين

يقال لقطعتين مستقيمتين موجهتين أنهما متكافئتان إذا كانتا

(١) لهما نفس الطول (٢) لهما نفس الاتجاه

فمثلا: $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ تكافئ $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ لا تكافئ $\overleftarrow{\text{م ن}}$ لاختلاف الطول

، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ لا تكافئ $\overleftarrow{\text{هـ و}}$ لاختلاف الاتجاه

تعريف (٥) جمع متجهين:-

إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (س١ ، ص١) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (س٢ ، ص٢)

فإن : $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (س١ + س٢ ، ص١ + ص٢)

فمثلاً :

إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ـ٣) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ٥)

فإن : $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٢ + ١ ، ـ٣ + ٥) = (٣ ، ٢)

خواص جمع المتجهات :

(١) خاصية الإبدال : $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ = $\overleftarrow{\text{ب}}$ + $\overleftarrow{\text{أ}}$

(٢) خاصية الدمج (التجميع) : $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ($\overleftarrow{\text{ب}}$ + $\overleftarrow{\text{جـ}}$) = ($\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$) + $\overleftarrow{\text{جـ}}$

(٣) المتجه الصفرى : $\overleftarrow{\text{و}}$ = (٠ ، ٠) ويكون $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{و}}$ = $\overleftarrow{\text{و}}$ + $\overleftarrow{\text{أ}}$ = $\overleftarrow{\text{أ}}$

(٤) المعكوس الجمعى : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) فإن (ـ $\overleftarrow{\text{أ}}$) = (ـ س ، ـ ص)

تعريف (٦) ضرب المتجه فى عدد حقيقى :

إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) ، ك ∈ ح

فإن : ك $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ك (س ، ص) = (ك س ، ك ص)

فمثلاً : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (ـ٣ ، ٥) فإن : ٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ٢ (ـ٣ ، ٥) = (٢ × ـ٣ ، ٢ × ٥) = (ـ٦ ، ١٠)

ملاحظه : إذا كان : $\overleftarrow{\text{ب}}$ = ك $\overleftarrow{\text{أ}}$

* وكان : ك > صفر ∴ $\overleftarrow{\text{ب}}$ // $\overleftarrow{\text{أ}}$ ولهما نفس الاتجاه

* وكان : ك < صفر ∴ $\overleftarrow{\text{أ}}$ // $\overleftarrow{\text{ب}}$ ولهما اتجاهين متضادين

مثال١ : إذا كان : أ = (-٣ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٠) أوجد ج = ٢ أ + ٤ ب

الحل

ج = ٢(-٣ ، ٢) + ٤(٤ ، ٠) = (-٦ ، ٤) + (١٦ ، ٠) = (١٠ ، ٤)

مثال٢ : إذا كان أ = (٣ ، -١) ، ب = (٠ ، ٢) ، ج = (١ ، ١) فأوجد أ + ٣ب - ٢ج

الحل

أ + ٣ب - ٢ج = (٣ ، -١) + ٣(٠ ، ٢) - ٢(١ ، ١)

= (٣ ، -١) + (٠ ، ٦) - (٢ ، ٢)

= (٣ + ٠ - ٢ ، -١ + ٦ - ٢) = (١ ، ٣)

مثال٣ : أوجد العددين ك ، ن إذا كان (ك ، ٢) + (٤ ، ن) = (١ ، ١)

الحل :

(ك ، ٢) + (٤ ، ن) = (ك + ٤ ، ٢ + ن) = (١ ، ١)

تساوى متجهين ∴ ك + ٤ = ١ ⟸ ك = -٣ ، ٢ + ن = ١ ⟸ ن = -١

مثال٤ : إذا كان أ = (-٣ ، ٤) ، ب = (١ ، ٠) ، ج = (س ، ص) فأوجد العددين س ، ص بحيث يكون أ = ب - ٢ج

الحل :

∵ أ = ب - ٢ج ∴ (-٣ ، ٤) = (١ ، ٠) - ٢(س ، ص)

(-٣ ، ٤) = (١ ، ٠) - (٢س ، ٢ص) = (١ - ٢س ، ٠ - ٢ص)

∴ -٣ = ١ - ٢س ⟸ ٢س = ١ + ٣ = ٤ ⟸ س = ٢

، ٤ = -٢ص ⟸ ص = -٢

مثـــال : إذا كان أ = (١ ، ٢) , ب = (٦ ، ٤) , جـ = (٣ ، −٢)
فعبر عن ب بدلالة أ , جـ

الحـــــــل

نفرض أن ب = ك أ + ن حـ

∴ (٦ ، ٤) = ك (١ ، ٢) + ن (٣ ، −٢)

(٦ ، ٤) = (ك ، ٢ ك) + (٣ ن ، −٢ ن) = (ك + ٣ ن ، ٢ ك − ٢ ن)

∴ ك + ٣ ن = ٦ (١) ، ٢ ك − ٢ ن = ٤ (٢)

بحل المعادلتين (١) × −٢ −٢ ك − ٦ ن = −١٢

جمع (٢) صفر − ٨ ن = −٨ ∴ ن = ١

بالتعويض فى الاولى ٢ ك − ٢ = ٤ ∴ ك = ٣ ∴ ب = ٣ أ + جـ

تمارين على جمع المتجهات وضرب المتجهات فى عدد حقيقى

(١) اذا كان أ = (٢ ,−١) , ب = (٣ ,٤) فأوجد ٢ أ + ٣ ب , ٢ ب ـ أ

(٢) إذا كان أ = (٢ , ٥) , ب = (ـ٣ , ـ١) , جـ = (ـ٢ , ٠) فأوجد ٢ ب ـ (٣ أ ـ جـ)

(٣) أوجد العددين ك , ن إذا كان (أولا) (ك , ٢) + (٤ , ن) = (١ , ١)

(ثانيا) ك (ـ٢ , ن) = (ـ٤ , ٦)   (ثالثا) (٢ , ٩) = ك (٢ , ٣) + ن (ـ٢ , ٥)

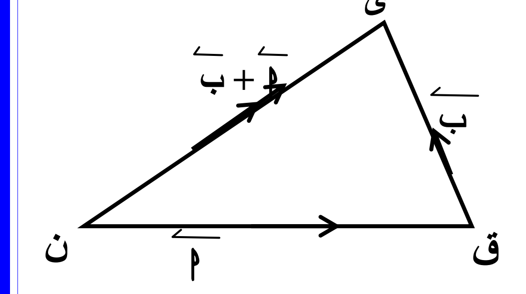
(٤) إذا كان أ = (٥ , ـ٢) , ب = (٣ , ـ٣) , حـ = (ـ١ , ٤) فعبر عن أ بدلالة ب , جـ

(٥) إ ذا كانت أ = (١ , ـ٢) , ب = (٣ , ٦) , جـ = (ـ٢ , ـ٥) , د = (ـ١ , ـ١)

فأوجد ن بحيث : ن أ = أ جـ ـ ب د

جمع المتجهات هندسيا :





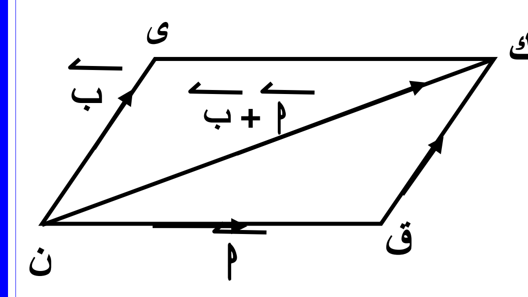
(١) قاعدة المثلث

إذا كان : ن ق تمثل المتجه أ ، ق ى تمثل المتجه ب

فأن : ن ى تمثل المتجه ن ق + ق ى

أى أن : ن ق + ق ى = ن ى الضلع الثالث للمثلث

(٢) قاعدة متوازى الأضلاع :



إذا كان : ن ق تمثل المتجه أ ، ن ى تمثل المتجه ب

فأن : ن ك تمثل المتجه أ + ب

أى أن : ن ق + ق ى = ن ك

يمثل قطر متوازى الاضلاع الذى له نفس نقطة البداية أو نفس نقطة النهاية

ملاحظات :

[١] فى أى مثلث أ ب جـ يكون : أ ب + ب جـ + جـ أ = و

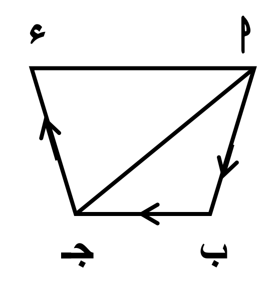
[٢] إذا كان أ ء متوسط فى Δ أ ب جـ فإن : أ ب + أ جـ = ٢ أ ء

الفرق بين متجهين هندسياً

حيث أن : و أ + أ ب = و ب فإن : أ ب = و ب − و أ = ب − أ

مثـــال : فى الشكل الرباعى: أ ب جـ ء أثبت أن : أ ب + ب جـ + جـ ء = أ ء

الحـــــل

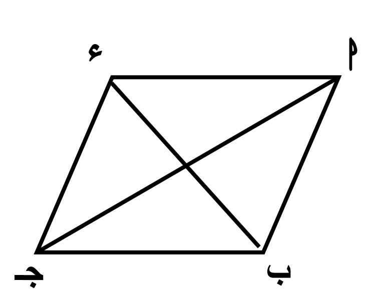


Δ أ ب جـ فيه أ ب + ب جـ = أ جـ

الأيمن (أ ب + ب جـ) + جـ ء = أ جـ + جـ ء = أ ء الأيسر

مثـ٢ـــال : فى متوازى الأضلاع أ ب جـ ء أثبت أن

أ جـ + ب ء = ٢ ب جـ



الحــــــــل

∵ أ جـ = أ ب + ب جـ　　،　ب ء = ب أ + أ ء

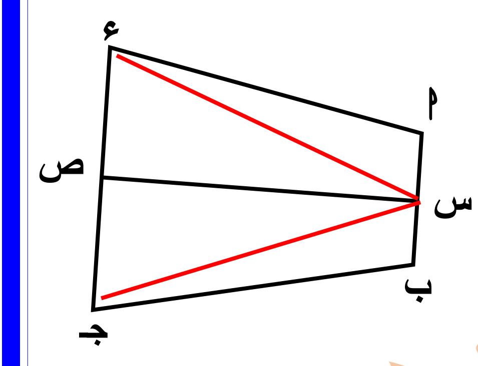
∴ أ جـ + ب ء = أ ب + ب جـ + ب أ + أ ء

= (ب جـ + أ ء) + (أ ب + ب أ)　　،　∵ ب جـ = أ ء

= ب جـ + ب جـ + و = ٢ ب جـ

مثـ٣ـــال: أ ب جـ ء شكل رباعى ، س منتصف أ ب ، ص منتصف جـ ء

أثبت أن : ب جـ + أ ء = ٢ س ص



الحــــــــل

∵ س منتصف أ ب　　∴ أ س = س ب

فى Δ س أ ء　　س أ + أ ء = س ء ..... (١)

فى Δ س ب جـ　　س ب + ب جـ = س جـ (٢)

بجمع (١) ، (٢) ∴ س أ + أ ء + س ب + ب جـ = س ء + س جـ

∵ ص منتصف ء جـ فى Δ س ء جـ

∴ أ ء + ب جـ = ٢ س ص　　وهو المطلوب

مثـ٤ـــال: أ ب جـ د مستطيل تقاطع قطريه فى م , س نقطة خارجـــة . أثبت أن

س أ + س جـ = س ب + س د

الحــــــــل

∵ م نقطة تقاطع قطرى المستطيل　　فإن م منتصفى أ جـ ، ب ء

Δ س أ جـ　　الأيمن　س أ + س جـ = ٢ س م

Δ س ب ء　　الأيمن　س ب + س ء = ٢ س م　　∴ الطرفان متساويان

مثـ٥ـال: فى أى شكل رباعى أ ب جـ د أثبت أن $\overrightarrow{\text{ءب}} - \overrightarrow{\text{جـب}} = \overrightarrow{\text{ءأ}} - \overrightarrow{\text{جـأ}}$

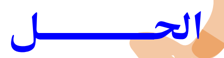
الحـــــل

الأيمن: $\overrightarrow{\text{ءب}} - \overrightarrow{\text{جـب}} = \overrightarrow{\text{ءب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{ءجـ}}$

الأيسر: $\overrightarrow{\text{ءأ}} - \overrightarrow{\text{جـأ}} = \overrightarrow{\text{ءأ}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{ءجـ}}$　　∴ الطرفان متساويان

مثـ٦ـال: أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{بجـ}} \parallel \overline{\text{أء}}$ **، هـ منتصف** $\overline{\text{أء}}$

أثبت أن. $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{هـجـ}}$



الحـــــل

∆ أ ب جـ　$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{أجـ}}$

∆ جـ أ ء　$\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{جـهـ}}$　جـ هـ متوسط

الأيمن: $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}} = \overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{هـجـ}}$

∴ الطرفان متساويان

مثـ٧ـال: أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى المثلث توازى الضلع الثالث وطولها يساوى نصف طولها



الحـــــل



∵ ء ، هـ منتصفى أ ب ، أ جـ

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أء}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أهـ}}$

∆ أ ب جـ　$\overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{بجـ}}$　(١)

∆ أ ء هـ　$\overrightarrow{\text{ءأ}} + \overrightarrow{\text{أهـ}} = \overrightarrow{\text{ءهـ}}$　(٢)

من (١)، (٢)　$\overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{ءأ}} + ٢\,\overrightarrow{\text{أهـ}} = ٢(\overrightarrow{\text{ءأ}} + \overrightarrow{\text{أهـ}}) = ٢\,\overrightarrow{\text{ءهـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{بجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{ءهـ}}$　　$\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ، ءهـ $= \frac{1}{2}$ بجـ

تمارين على التمثيل الهندسى للمتجهات

(١) أ ب جـ د شكل رباعى أثبت أن أب + ب جـ + جـ د + د أ = و

حيث أن المتجه و هو المتجه الصفرى (٠,٠)

(٢) أ ب جـ مثلث فيه د منتصف ب جـ , هـ منتصف أ جـ , و منتصف أ ب

أثبت أن (١) أ و + أ هـ = أ د , (٢) أ و − أ هـ = ١/٢ جـ ب

(٣) أ ب جـ د شبه منحرف فيه ٣ أ د = ٢ ب جـ . أثبت أن

٢ أ جـ + ٢ ب د = ٥ أ د

(٤) أب جـ د متوازى أضلاع , م نقطة فى مستوية أثبت أن أ م + م ب = م جـ + ء م

ومن ذلك أثبت أن . م أ + م جـ = م ب + م د

(٥) أ ب جـ د شكل رباعى فيه . ٢ب جـ = ٥ أ د .أثبت أن

(!) ٢ أ جـ + ٢ ب ء = ٧ أ ء (!!) ٢ أ ب − ٢ ء جـ = ٣ ء أ

(٦) أ ب جـ مثلث . د نقطة بحيث ٤ ب د = ٣ د جـ

أثبت أن ٣ أ جـ + ٤ أ ب = ٧ أ ء

(٧) س ص ع مثلث . ل نقطة بحث ص ل = ٢ ل

أ ثبت أن س ص + ٢ س ع = ٣ س ل

(١٠) س ص ع مثلث . ل نقطة بحث ص ل = ٢ ل ع

أ ثبت أن س ص + ٢ س ع = ٣ س ل

(١١) أ ب جـ د متوازى أضلاع . م نقطة خارجة أثبت أن

{أولا} أ م + ب م + م ء + م جـ = ٢ أ ء

{ثانيا} م أ + م ب + م جـ + م ء = ٤ م ن : حيث ن نقطه تلاقى قطريه

(١٢) أ ب جـ د شكل رباعى فيه س منتصف أ ب , ص منتصف ء جـ .

أثبت أن أ ء + ب جـ = ٢ س ص

المتجهات والإحداثيات .

متجها الوحدة الاساسيان : $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$

$\overrightarrow{\text{س}}$ هو متجه موضع للنقطة (١ ، ٠) ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ هو متجه موضع للنقطة (٠ ، ١)

التعبير عن أى متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين

المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\overrightarrow{\text{أ}}$ = س $\overrightarrow{\text{س}}$ + ص $\overrightarrow{\text{ص}}$

فمثلاً : $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ٣) = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء}}$ = (٠ ، ٥) = ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$

مثـــ١ـــال : إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ـ ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$

أوجد: بدلالة متجهى الوحدة : (١) ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ـ ($\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$) (٢) $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$

الحـــــل

$\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ـ ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ٠) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (١ ، ـ ٥)

(١) ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ـ ($\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$) = ٢ (١ ، ـ ٥) ـ [(٣ ، ـ ٢) + (٣ ، ٠)]

= (٢ ، ـ ١٠) ـ (٦ ، ـ ٢) = (ـ ٤ ، ـ ٨)

بدلالة متجهى الوحدة = ـ ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ ـ ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$

(٢) $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ ـ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٣ ، ٠) ـ (١ ، ـ ٥) = (٢ ، ٥)

بدلالة متجهى الوحدة = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$

مثـــ٢ـــال : عبر عن كل من المتجهات الآتية بزوج مرتب من ع^2 ثم أوجد متجه الوحدة فى إتجاه كل منهما $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ٨ $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء}}$ = − $\overrightarrow{\text{س}}$ ـ ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$

الحـــــل

$\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٤ (٠ ، ١) + ٣ (١ ، ٠) = (٠ ، ٤) + (٣ ، ٠) = (٣ ، ٤)

$\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ٨ (١ ، ٠) = (٨ ، ٠)

$\overrightarrow{\text{ء}}$ = − (١ ، ٠) − ٢ (٠ ، ٤) = (−١ ، ٠) + (٠ ، −٢) = (−١ ، −٢)

تعريف معيار المتجه (طول المتجه)

إذا كان : $\vec{أ}$ = (س ، ص) فإن العدد الحقيقى $\sqrt{س^2 + ص^2}$ يسمى معيار المتجه $\vec{أ}$

متجه الوحدة $\vec{س}$ = (١ ، ٠) لأن $\|\vec{س}\| = \sqrt{١ + ٠} = ١$ وحدة طول

$\|\vec{س}\| = \|\vec{ص}\| = ١$ وحدة طول

مثـــال ١ : أوجد معيار كل من المتجهات الآتية :

$\vec{أ} = ٥\vec{س} - ١٢\vec{ص}$ ، $\vec{ب} = (٣ ، -٦)$ ، $\vec{جـ} = (\sqrt{٧} ، ٣)$

الحـــــــل

$\|\vec{أ}\| = \sqrt{٥^2 + ١٢^2} = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$ وحدة طول

$\|\vec{ب}\| = \sqrt{٣^2 + ٦^2} = \sqrt{٩ + ٣٦} = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$ وحدة طول

$\|\vec{جـ}\| = \sqrt{٧ + ٣^2} = \sqrt{٧ + ٩} = \sqrt{١٦} = ٤$ وحدة طول

مثـــال ٢ : إذا كانت $\vec{أ} = (١ , -٢)$, $\vec{ب} = (٣ , ٤)$, $\vec{جـ} = (-٢ , ٥)$ أوجد كل من

$\|٢\vec{أ} + \vec{ب} + ٢\vec{جـ}\|$, $\|\vec{أ جـ}\|$

الحـــــــل

$٢\vec{أ} + \vec{ب} + ٢\vec{جـ} = ٢(١ ، -٢) + (٣ ، ٤) + ٢(-٢ ، ٥)$

$= (٢ ، -٤) + (٣ ، ٤) + (-٤ ، ١٠) = (١ ، ١٠)$

$\therefore \|٢\vec{أ} + \vec{ب} + ٢\vec{جـ}\| = \sqrt{١^2 + ١٠^2} = \sqrt{١ + ١٠٠} = \sqrt{١٠١}$ وحدة طول

$\vec{أ جـ} = \vec{جـ} - \vec{أ} = (-٢ ، ٥) - (١ ، -٢) = (-٣ ، ٧)$

$\|\vec{أ جـ}\| = \sqrt{(-٣)^2 + ٧^2} = \sqrt{٩ + ٤٩} = \sqrt{٥٨}$ وحدة طول

مثـــ٣ـــال : إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (ك , ٥) , $\overleftarrow{ب}$ = (٤ , ١) فأوجد قيمة ك التى تجعل || $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$ || = ١٠

الحـــــــل

$\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$ = (ك ، ٥) + (٤ ، ١) = (ك + ٤ ، ٦)

∴ || $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$ || = $\sqrt{(ك^٢ + ٨ ك + ١٦) + ٣٦}$ = ١٠ بتربيع الطرفين

∴ $ك^٢$ + ٨ ك + ١٦ + ٣٦ = ١٠٠ ⟸ $ك^٢$ + ٨ ك − ٤٨ = ٠ بالتحليل

(ك + ١٢) (ك − ٤) = ٠ ∴ ك = ٤ أ، ك = − ١٢

مثـــ٤ـــال : إذا كانت $\overleftarrow{أ}$ = (٣ , −١) , $\overleftarrow{ب}$ = (−١ , ٢) $\overleftarrow{جـ}$ = (٤ , ٠) أوجد إحداثى النقطة ء بحيث أ ب جـ ء متوازى أضلاع

الحـــــــل

∵ أ ب جـ ء متوازى أضلاع

∴ $\overleftarrow{أ ء}$ تكافئ $\overleftarrow{ب جـ}$ فإن : $\overleftarrow{ء}$ − $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{جـ}$ − $\overleftarrow{ب}$ ⟸ $\overleftarrow{ء}$ − $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{جـ}$ − $\overleftarrow{ب}$

∴ $\overleftarrow{ء}$ = $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{جـ}$ − $\overleftarrow{ب}$ = (٣ ، −١) + (٤ ، ٠) − (−١ ، ٢) = (٦ ، ١)

تمارين على المتجهات والأحداثيات

(١) عبر عن كل من المتجهات الآتية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين. ثم أوجد معيار كل منهما

$\overleftarrow{أ}$ = (٣، −٤) ، $\overleftarrow{ب}$ = (−٥، ١٢) ، $\overleftarrow{جـ}$ = (١ ، ١) ، $\overleftarrow{د}$ = (٧ ، ٠)

(٢) عبر عن كل من المتجهات الآتية بزوج مرتب من $ع^٢$ ثم أوجد متجه الوحدة فى إتجاه كل منهما $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = ٤ $\overleftarrow{ص}$ + ٣ $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ = ٨ $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{د}$ = − $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$

(٣) إذا كانت $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، ١) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٠ ، −٣) ، $\overleftarrow{جـ}$ = (−٥ ، ٣) أوجد كل من

|| $\overleftarrow{أ ب}$ + $\overleftarrow{أ جـ}$ || ، || $\overleftarrow{أ ب}$ || ، || $\overleftarrow{جـ ب}$ − $\overleftarrow{ب أ}$ ||

(٤) إذا كانت $\overleftarrow{أ}$ = (٣ ، −١) , $\overleftarrow{ب}$ = (−١ ، ٢) $\overleftarrow{جـ}$ = (٤ ، ٠) أوجد كل من

{ أولاً } إحداثى النقطة (د) بحيث $\overleftarrow{أ جـ}$ تكافئ $\overleftarrow{د ب}$

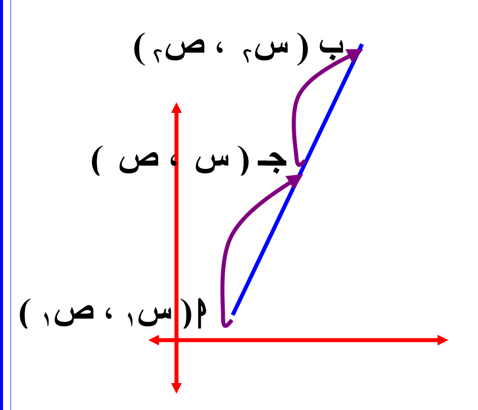
{ ثانيا } أحداثى النقطة هـ بحيث أ ب جـ د متوازى أضلاع

(٥) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (−١ ، −١) ، $\overleftarrow{ب}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ك $\overleftarrow{ص}$ فأوجد قيمة (ك) التى تجعل || $\overleftarrow{أ ب}$ || =٥

(٦) إذا كان $\overleftarrow{ب}$ = (−٥ , ك) فأوجد قيمة (ك) التى تجعل || $\overleftarrow{ب}$ || =١٣

تقسيم قطعة مستقيمة

أولاً التقسيم من الداخل :



فى الشكل المقابل :

إذا كانت النقطة حـ (س ، ص) تقع بين النقطتين

ٵ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) بحيث :

$$\frac{ٵحـ}{حـب} = \frac{م_1}{م_2}$$

فإن : النقطة حـ تقسم $\overline{ٵب}$ من الداخل بنسبة م١ : م٢

ونوجد إحداثى نقطة حـ (س ، ص) من العلاقتين :

$$س = \frac{م_1 س_2 + م_2 س_1}{م_1 + م_2} \quad ، \quad ص = \frac{م_1 ص_2 + م_2 ص_1}{م_1 + م_2}$$

مثـ١ـال : إوجد إحداثى النقطة حـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{ٵب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢
حيث : ٵ (١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٥)

الحــــل

س		النسبة		ص
١		①		٢
		+		
٤		②		٥

$$س = \frac{م_1 س_2 + م_2 س_1}{م_1 + م_2} = \frac{١ \times ٤ + ٢ \times ١}{١ + ٢} = \frac{٦}{٣} = ٢$$

$$ص = \frac{م_1 ص_2 + م_2 ص_1}{م_1 + م_2} = \frac{١ \times ٥ + ٢ \times ٢}{١ + ٢} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

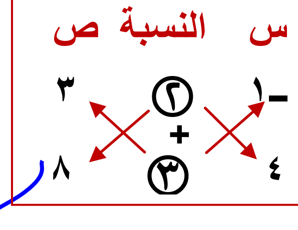
∴ حـ (س ، ص) = (٢ ، ٣)

مثـ٢ـال : إذا كانت ٵ = (-١ ، ٣) ، ب = (٤ ، ٨) أوجد أحداثيات جـ التى تقسم $\overline{ٵب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣

الحــــل

س		النسبة		ص
-١		②		٣
		+		
٤		③		٨

بفرض أن جـ = (س ، ص)



$$س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} = \frac{٢ \times ٤ + ٣ \times -١}{٢ + ٣} = \frac{٨ - ٣}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$$

$$ص = \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢} = \frac{٢ \times ٨ + ٣ \times ٣}{٢ + ٣} = \frac{٢٥}{٥} = ٣$$

أحداثيات جـ (س ، ص) = (١ ، ٥)

مثــ٣ــال : إوجد إحداثى النقطة حـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٤ : ٣

حيث : أ (-٥ ، -٤) ، ب (٢ ، -٤)

س	النسبة	ص
-٥	④	-٤
	+	
٢	③	-٤

الحــــل

$$س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} = \frac{٤ \times ٢ + ٣ \times -٥}{٤ + ٣} = \frac{-٧}{٧} = -١$$

$$ص = \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢} = \frac{٤ \times -٤ + ٣ \times -٤}{٤ + ٣} = \frac{-٢٨}{٧} = -٤$$

أحداثيات جـ (س ، ص) = (-١ ، -٤)

ملحوظة : إذا كانت النقطة حـ (س ، ص) منتصف $\overline{أب}$ حيث :

أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإن :

$$س = \frac{س_١ + س_٢}{٢} \quad ، \quad ص = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$$

مثــ٤ــال : أوجد إحداثى نقطة م منتصف $\overline{أب}$ حيث : أ = (٣ ، ٥) ، ب = (١ ، -١)

الحــــــل

$$م = \left(\frac{٣ + ١}{٢} \quad ، \quad \frac{٥ - ١}{٢} \right) = (٢ ، ٢)$$

مثــ٥ــال : إذا كانت م (٢ ، ١) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث : أ = (س ، ١) ، ب = (٣ ، ص)

فإوجد قيمة كل من س ، ص

الحـــــــــــل

∵ م هى نقطة المنتصف

$$\therefore (\text{١} ، \text{٢}) = \left(\frac{\text{س} + \text{٣}}{\text{٢}} ، \frac{\text{١} + \text{ص}}{\text{٢}} \right)$$

$$\therefore \text{١} = \frac{\text{س} + \text{٣}}{\text{٢}} \quad \therefore \text{س} + \text{٣} = \text{٢} \quad \text{ومنها : س} = -\text{١}$$

$$، \ \text{٢} = \frac{\text{١} + \text{ص}}{\text{٢}} \quad \therefore \text{١} + \text{ص} = \text{٤} \quad \text{ومنها : ص} = \text{٣}$$

ثانيا التقسيم من الخارج :



فى الشكل المقابل :

إذا كانت النقطة حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، حـ ∉ $\overline{\text{أب}}$ بحيث :

$$\frac{\text{أجـ}}{\text{جـب}} = \frac{\text{م}_1}{\text{م}_2}$$

فإن : النقطة حـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة $\text{م}_1 : \text{م}_2$

ونوجد إحداثى نقطة حـ (س ، ص) من العلاقتين :

$$\text{س} = \frac{\text{م}_1 \text{س}_2 - \text{م}_2 \text{س}_1}{\text{م}_1 - \text{م}_2} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\text{م}_1 \text{ص}_2 - \text{م}_2 \text{ص}_1}{\text{م}_1 - \text{م}_2}$$

مثـــ٦ـــال : أوجد إحداثى النقطة حـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ٢ : ٥

حيث : أ (١ ، -٣) ، ب (٤ ، ٣)

الحـــــل

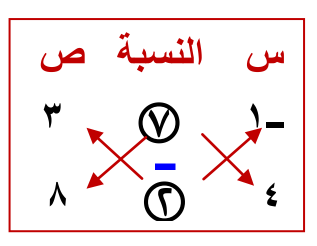
س	النسبة	ص
١	②	-٣
٤	⑤	٣

$$\text{س} = \frac{\text{م}_1 \text{س}_2 - \text{م}_2 \text{س}_1}{\text{م}_1 - \text{م}_2} = \frac{\text{٢} \times \text{٤} + -\text{٥} \times \text{١}}{\text{٢} - \text{٥}} = \frac{\text{٣}}{-\text{٣}} = -\text{١}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{م}_1 \text{ص}_2 - \text{م}_2 \text{ص}_1}{\text{م}_1 - \text{م}_2} = \frac{\text{٢} \times \text{٣} - \text{٥} \times -\text{٣}}{\text{٢} - \text{٥}} = \frac{\text{٢١}}{-\text{٣}} = -\text{٧}$$

أحداثيات جـ (س ، ص) = (-١ ، -٧)

مثـ٧ـال : إذا كانت أ = (−١ ، ٣) ، ب = (٤ ، ٨) أوجد (ج) التى تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة ٧ : ٢



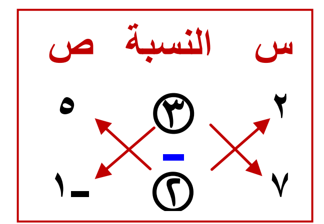
الحــــل

$$س = \frac{م_١ س_٢ - م_٢ س_١}{م_١ - م_٢} = \frac{٤ \times ٧ + - ٢ \times -١}{٧ - ٢} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

$$ص = \frac{م_١ ص_٢ - م_٢ ص_١}{م_١ - م_٢} = \frac{٧ \times ٨ - ٢ \times ٣}{٧ - ٢} = \frac{٥٠}{٥} = ١٠$$

أحداثيات جـ (س ، ص) = (٦ ، ١٠)

مثـ٨ـال : إوجد إحداثى النقطة حـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢
حيث : أ (٢ ، ٥) ، ب (٧ ، −١)



الحــــل

$$س = \frac{م_١ س_٢ - م_٢ س_١}{م_١ - م_٢} = \frac{٣ \times ٧ + - ٢ \times ٢}{٣ - ٢} = \frac{١٧}{١} = ١٧$$

$$ص = \frac{م_١ ص_٢ - م_٢ ص_١}{م_١ - م_٢} = \frac{٣ \times -١ - ٢ \times ٥}{٣ - ٢} = \frac{-١٣}{١} = -١٣$$

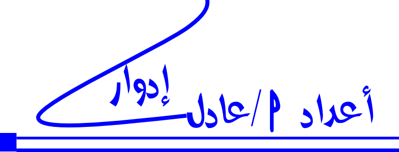
أحداثيات جـ (س ، ص) = (١٧ ، −١٣)

ملاحظة (١) : لإيجاد نسبة التقسيم ونوعه نستخدم إحدى العلاقتين :

$$س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} \quad \text{أو} \quad ص = \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢}$$

ثم نوجد $م_١ : م_٢$ فإذا كانت (متشابهتين فى الأشارة) يكون التقسيم من الداخل

، إذا كانت (مختلفتين فى الأشارة) يكون التقسيم من الخارج



مثـ٩ـال : إذا كانت ٲ = (−١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٧) ، جـ = (س ، ٤) أوجد النسبة التى تقسم بها جـ القطعة المستقيمة $\overline{ٲب}$ مبينا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة س

الحـــل

س	النسبة	ص
−١	$م_١$	٢
٤	$م_٢$	٧

$$ص = \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢} = \frac{م_١ \times ٧ + م_٢ \times ٢}{م_١ + م_٢} = ٤$$

∴ ٧ $م_١$ + ٢ $م_٢$ = ٤ $م_١$ + ٤ $م_٢$

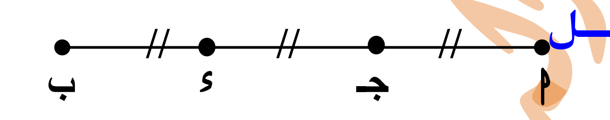
∴ ٧ $م_١$ − ٤ $م_١$ = ٤ $م_٢$ − ٢ $م_٢$ ⟸ ٣ $م_١$ = ٢ $م_٢$

$م_١$: $م_٢$ = ٢ : ٣ لهما نفس الأشارة (التقسيم من الداخل)

$$∴ س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} = \frac{٢ \times ٤ + ٣ \times -١}{٢ + ٣} = \frac{٨ - ٣}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$$

مثـ١٠ـال : إذا كانت ٲ = (−١ ، ١) ، ب = (٢ ، ٧) أوجد أحداثيات النقط التى تقسم ٲ ب من الداخل إلى ثلاث أجزاء متساوية

الحـــــل



(جـ) تقسم $\overline{ٲب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

س	النسبة	ص
−١	①	١
٢	②	٧

$$س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} = \frac{١ \times ٢ + ٢ \times -١}{١+٢} = \frac{صفر}{٣} = ٠$$

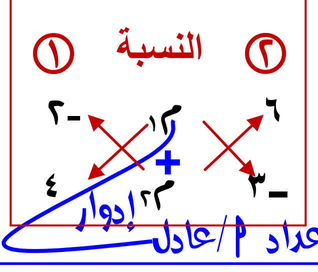
$$ص = \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢} = \frac{١ \times ٧ + ٢ \times ١}{١+٢} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

∴ جـ (س ، ص) = (٠ ، ٣)

(ء) منتصف $\overline{جـ ب}$ ∴ ء = $\left(\frac{٠+٢}{٢} ، \frac{٣+٧}{٢} \right)$ = (١ ، ٥)

مثـ١١ـال : إذا كانت ٲ(٦ ، −٢) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (−٣ ، ٤) حيث : ٲ ، ب ، حـ على إستقامة واحدة أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{ٲ جـ}$ بالنقطة ب مبيناً نوع التقسيم

الحـــل



$$س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} = \frac{م_١ \times -٣ + م_٢ \times ٦}{م_١ + م_٢} = ٢$$

∴ $-3 م_1 + 6 م_2 = 2 م_1 + 2 م_2$

∴ $4 م_2 - 2 م_2 = 3 م_1 + 2 م_1$ ⟸ $4 م_2 = 5 م_1$

∴ $\frac{م_1}{م_2} = \frac{4}{5}$ لهما نفس الأشارة (التقسيم من الداخل)

ملاحظة (٢) : لإيجاد نسبة تقسيم محورى الإحداثيات لقطعة مستقيمة :

١ – نسبة تقسيم قطعة مستقيمة بمحور السينات " نقطة التقاطع (س ، ٠) "

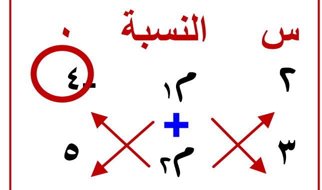
نستخدم العلاقة : $م_1 ص_2 + م_2 ص_1 = صفر$

٢ – نسبة تقسيم قطعة مستقيمة بمحور الصادات " نقطة التقاطع (٠ ، ص) "

نستخدم العلاقة : $م_1 س_2 + م_2 س_1 = صفر$

مثـــال : إذا كانت ٢ = (٢ ، –٤) ، ب = (٣ ، ٥) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{٢ ب}$ بواسطة محورى الاحداثيات

الحـــل

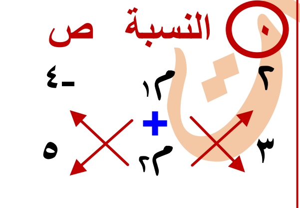


نفرض جـ تقسم $\overline{٢ ب}$ بواسطة محور السينات ∴ جـ = (س ، ٠)

$ص = \frac{م_1 \times ص_2 + م_2 \times ص_1}{م_1 + م_2} = \frac{م_1 \times 5 + م_2 \times -4}{م_1 + م_2} = صفر$

$5م_1 - 4 م_2 = 0$　　$5م_1 = 4 م_2$　　∴ $\frac{م_1}{م_2} = \frac{4}{5}$

∴ ٢ ب تنقسم بمحور السينات بنسبة ٤ : ٥ من الداخل



نفرض ء تقسم $\overline{٢ ب}$ بواسطة محور الصادات ∴ ء = (٠ ، ص)

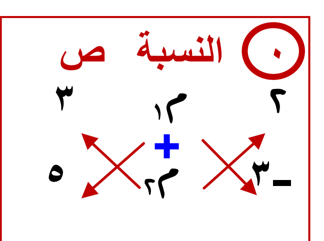
$س = \frac{م_1 \times س_2 + م_2 \times س_1}{م_1 + م_2} = \frac{م_1 \times 3 + م_2 \times 2}{م_1 + م_2} = صفر$

$3 م_1 + 2 م_2 = 0$　　$3 م_1 = -2 م_2$　　∴ $\frac{م_1}{م_2} = \frac{-2}{3}$

∴ ٢ ب تنقسم بمحور الصادات بنسبة ٢ : ٣ من الخارج

مثـــ٦ـــال : إذا كانت ٩ (٢ ، ٣) ، ب (−٣ ، ٥) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{\text{٩ ب}}$ بنقطة تقاطعها مع محور الصادات مبيناً نوع التقسيم

الحـــــــل



نفرض ء تقسم $\overline{\text{٩ ب}}$ بواسطة محور الصادات (٠ ، ص)

$$\text{س} = \frac{\text{م}_1 \times \text{س}_2 + \text{م}_2 \times \text{س}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2} = \frac{\text{م}_1 \times -3 + \text{م}_2 \times 2}{\text{م}_1 + \text{م}_2} = \text{صفر}$$

$-3\text{م}_1 + 2\text{م}_2 = 0$ ، $3\text{م}_1 = 2\text{م}_2$ ∴ $\frac{\text{م}_1}{\text{م}_2} = \frac{2}{3}$

∴ ٩ ب تنقسم بمحور الصادات بنسبة ٢ : ٣ من الداخل

ملاحظة (١) : إحداثى نقطة تقاطع متوسطات أى مثلث ٩ ب حـ حيث :

٩ (س_1 ، ص_1) ، ب (س_2 ، ص_2) ، حـ (س_3 ، ص_3)

هى : $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3}{3} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3}{3} \right)$

مثـــ٧ـــال : Δ ٩ ب حـ فيه ٩ (٦ ، ٥) ، ب (١ ، ٣) ، حـ (٥ ، ١)

أوجد إحداثى نقطة تقاطع متوسطات مثلث ٩ ب حـ

الحـــــــل

نقطة تقاطع متوسطات Δ ٩ ب جـ هى

$$\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3}{3} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{6 + 1 + 5}{3} ، \frac{5 + 3 + 1}{3} \right) = \left(\frac{12}{3} ، \frac{9}{3} \right) = (4 ، 3)$$

تمارين على تقسيم قطعة مستقيمة

(١) إوجد إحداثى النقطة حـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢
حيث : أ (–١ ، ٢) ، ب (٢ ، ٨)

(٢) إوجد إحداثى النقطة حـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{أ ب}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢
حيث : أ (٥ ، –٣) ، ب (–٢ ، ١١)

(٣) إوجد إحداثى نقطة أ التى تقع عند ربع المسافة من النقطة ب (٧ ، –٤)
إلى النقطة حـ (–١ ، ٠)

(٤) إذا كانت أ (٣ ، ٢) ، ب (٦ ، ٨) أوجد إحداثى حـ ، ء بحيث تنقسم $\overline{أ ب}$
إلى ثلاث قطع مستقيمة متساوية

(٥) إذا كانت حـ ∉ $\overline{أ ب}$ ، بعد حـ عن أ ضعف بعدها عن ب حيث ا (٦ ، ٤) ، ب (٩ ، ٧)
أوجد إحداثى حـ

(٦) إذا كانت أ (–٣ ، ٥) ، ب (١ ، ١) ، كانت حـ تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٣ ،
ء تقسم $\overline{أ ب}$ من الخارج بنفس النسبة أوجد طول حـء

(٧) إذا كانت حـ (س ، –٥) تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ٤ : ١ ، وكانت أ (٨ ، ٣)
، ب (٣ ، ص) أوجد قيمة كل من س ، ص

(٨) إذا كانت أ (٣ ، –٢) ، ب (– ٢ ، ٤) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{أ ب}$ بالنقطة
حـ (٨ ، ص) ثم أوجد قيمة ص

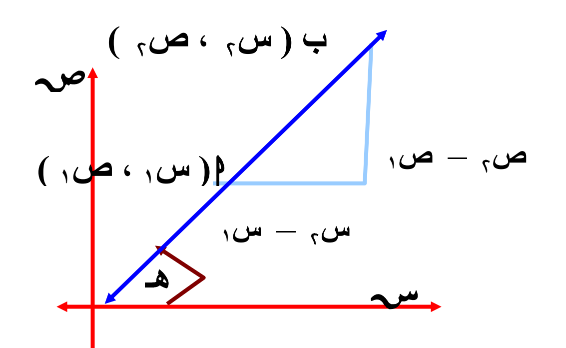
(٩) إذا كانت أ (٨ ، ٣) ، ب (٣ ، –٢) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{أ ب}$ بكل من محورى
الإحداثيات مبيناً نوع التقسيم ثم أوجد نقطتى التقسيم

(١٠) أوجد إحداثيات نقطة تقاطع متوسطات △ أ ب حـ حيث :
أ (٣ ، ٣) ، ب (–٢ ، ٥) ، حـ (–٤ ، ٢)

(١١) إذا كانت ء (٢ ، –١) هى نقطة تقاطع متوسطات △ أ ب حـ حيث :
أ (٥ ، –٤) ، ب (–٣ ، ٢) أوجد إحداثى نقطة حـ

معادلة الخط المستقيم

" طرق إيجاد ميل الخط المستقيم "



(١) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين :

أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) هو :

$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

فمثلاً : (١) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : (٤ ، – ١) ، (٧ ، ٢) هو :

$$م = \frac{٧ - ٤}{٢ - (- ١)} = \frac{٣}{٣} = ١$$

(٢) إذا كان متجه إتجاه المستقيم (أ ، ب) فأن الميل $م = \frac{ب}{أ}$

فمثلاً : ميل المستقيم الذى معادلته هى : (س ، ص) = (٢ ، ٧) + ك (٤ ، ٥) هو : $م = \frac{٥}{٤}$

(٣) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هى : ص = م س + حـ

فإن ميل الخط المستقيم هو : م

فمثلاً : ميل الخط المستقيم الذى معادلته : ص = ٣ س – ٥ هو : م = ٣

(٤) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هى : ا س + ب ص + حـ = ٠

فإن ميل الخط المستقيم هو : $م = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$

فمثلاً : ميل الخط المستقيم الذى معادلته : ٢ ص + ٣ س – ٥ = ٠ هو : $م = \frac{-٣}{٢}$

(٥) تعريف : ميل المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ هو : م = طا هـ

فمثلاً : ميل الخط المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

هو : م = طا ٤٥° = ١

الزاوية هـ	صفر	٤٥°	١٣٥°	٩٠°
الميل : ظا هـ	صفر	١	- ١	غير معرف

ملاحظات :

(١)إذا كان المستقيمان المتوازيان

فأن متجه أتجاه الأول = متجه أتجاه الثانى ويكون ميل الأول = ميل الثانى

($م_١$ = $م_٢$) ، وبالعكس إذا كان المستقيمان متوازيان فإن ميلاهما متساويان

فمثلاً : إذا كان ميل مستقيم = $\frac{١}{٣}$ فإن : ميل المستقيم الموازى له = $\frac{١}{٣}$

أو متجه أتجاه المستقيم الأول (٣ ، ١) فإن متجه أتجاه المستقيم الثانى (٣ ، ١)

(٢) إذا كان المستقيمان المتعامدان

فإن متجه إحداهما (ﺃ ، ب) ومتجه الثانى (ب ، – ﺃ) ويكون حاصل ضرب ميلاهما :

($م_١$ × $م_٢$ = – ١) وبالعكس إذا كان حاصل ضرب ميلاهما = – ١ المستقيمان متعامدان

فمثلاً : إذا كان ميل مستقيم = $\frac{٢}{٥}$ فإن : ميل المستقيم العمودى عليه = $\frac{-٥}{٢}$

أ، متجه أتجاه المستقيم الأول (٥ ، ٢) فإن متجه أتجاه المستقيم الثانى (٢ ، – ٥)

(٣) ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = صفر م = صفر والعكس صحيح

(٤) ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات غير معرف " $\frac{صفر}{١}$ "

(٥) لأى ثلاث نقط ﺃ ، ب ، ﺣ إذا كان : ميل $\overleftrightarrow{ﺃب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ﺃﺟ}$

فإن : النقط ﺃ ، ب ، ﺣ تكون على إستقامة واحدة

الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم :

المعادلة المتجهه: $\vec{ر}$ = ق + ك $\vec{ى}$

(س ، ص) = ($س_١$ ، $ص_١$) + ك (ﺃ ، ب)

المعادلتين الوسيطيتين : س = $س_١$ + ك ﺃ ،،، ص = $ص_١$ + ك ب

المعادلة المتماثلة (الإحداثية) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) ، وميله م

هى : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م أ, (ص – $ص_١$) = م (س – $س_١$)

" الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هى : ﺃ س + ب ص + ﺣ = ٠ "

أعداد ﺃ/عادل إدوار

مثــ١ـال : أوجد معادلات الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥) ، ومتجه إتجاهه (١ ، ٢)

الحـــــــــل

المعادلة المتجهه: (س ، ص) = ($س_١$ ، $ص_١$) + ك (ﺃ ، ب)

(س ، ص) = (٣ ، ٥) + ك (١ ، ٢)

المعادلتين الوسيطيتين : س = $س_١$ + ك ﺃ ،،، ص = $ص_١$ + ك ب

س = ٣ + ك ،،، ص = ٥ + ٢ك

المعادلة المتماثلة ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ٥) ، وميله م = $\frac{ب}{ﺃ}$ = $\frac{٢}{١}$

$\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = $\frac{ص - ٥}{س - ٣}$ = ٢

∴ ص − ٥ = ٢ س − ٦　　أى : ٢ س − ص − ١ = ٠

مثــ٢ـال : أوجد معادلات الخط المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٦ ، ٤)

الحـــــــــل

∵ المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) ، وميله م = $\frac{ب}{ﺃ}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٤ - ١}{٦ - ٣}$ = $\frac{٣}{٣}$ = ١

المعادلة المتجهه: (س ، ص) = ($س_١$ ، $ص_١$) + ك (ﺃ ، ب)

(س ، ص) = (٣ ، ١) + ك (١ ، ١)

المعادلتين الوسيطيتين : س = $س_١$ + ك ﺃ ،،، ص = $ص_١$ + ك ب

س = ٣ + ك ،،، ص = ١ + ك

معادلة الخط المستقيم يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٦ ، ٤)

$\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م　　∴ $\frac{ص - ١}{س - ٣}$ = ١

∴ ص − ١ = س − ٣　　∴ س − ص − ٢ = ٠

مثـــ٣ـــال : معادلة الخط المستقيم الذى ميله يساوى ٤ ، ويقطع من محور الصادات الوجب جزءاً طوله يساوى ٣

الحـــــــــل :

المادلة هى : ص = م س + حـ   ∴ ص = ٤ س + ٣

المعادلة المتجهه: ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٣) ،   وميله م = $\frac{ب}{أ}$ = ٤

(س ، ص) = (٠ ، ٣) + ك (١ ، ٤)

ملاحظة : معادلة الخط المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (أ ، ٠) ، و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب)   هى : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

أ هو الجزء المقطوع من محور السينات ، ب هو الجزء المقطوع من محور الصادات

و تسمى هذه المعادلة بمعادلة المستقيم بدلالة الجزأين المقطوعين من محورى الإحداثيات أو تسمى صورة المقطعين

مثـــ٤ـــال : معادلة الخط المستقيم الذى يقطع من محور السينات السالب جزءاً طوله وحدتين ، و يقطع من محور الصادات الموجب جزءاً طوله ٣ وحدات

الحـــــــــل

∵ معادلة الخط المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (أ ، ٠) ، و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب) هى : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

∴ المعادلة هى : $\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ ∴ ٣ س − ٢ ص − ٦ = ٠

ملاحظات :

(١) المستقيم الموازى لمحور السينات و يمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$)   ميله   م = صفر

المعادلة المتجهه : $\overrightarrow{ر}$ = ($س_١$ ، $ص_١$) + ك (١ ، ٠) ، المعادلة العامة   ص = $ص_١$

(٢) معادلة المستقيم الموازى لمحور الصادت و يمر بالنقطة (س١ ، ص١)   ميله م = $\frac{١}{٠}$

المعادلة المتجهه : ر = (س١ ، ص١) + ك (٠ ، ١) ، المعادلة العامة   س = س١

(٣) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و (٠ ، ٠)   " ميل المستقيم = م "

هى المعادلة المتجهه ر = ك (٩ ، ب)   ،   المعادلة العامة : ص = م س

(٤) فى المعادلة : ٩ س + ب ص + حـ = ٠

لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات نضع   ص = ٠

، لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات نضع   س = ٠

(٥) المستقيم الذى يقطع من محور السينات جزءاً طوله (٩) يمر بالنقطة (٩ ، ٠)

، المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءاً طوله (ب) يمر بالنقطة (٠ ، ب)

مثـــــال : أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (–١ ، ٣) وميله = $\frac{٣}{٥}$

الحــــــــل

∵ المستقيم مار بالنقطة (–١ ، ٣) ، وميله م = $\frac{ب}{٩}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ المعادلة المتجهه: (س ، ص) = (س١ ، ص١) + ك (٩ ، ب)

(س ، ص) = (–١ ، ٣) + ك (٥ ، ٣)

مثـــــال : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين ٩ (١ ، ٢) ، ب (٥ ، ٧)

الحــــــــل

∵ المستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٢) ، وميله م $\frac{ص٢ – ص١}{س٢ - س١}$ = $\frac{٧ – ٢}{٥ – ١}$ = $\frac{٥}{٤}$

المعادلة $\frac{ص – ص١}{س – س١}$ = م   ∴ $\frac{ص – ٢}{س - ١}$ = $\frac{٥}{٤}$

∴ المعادلة هى : ٥ س – ٥ = ٤ ص – ٨   ٥ س – ٤ ص + ٣ = ٠

مثـــ٧ـــال : أوجد معادلة المستقيم الذى معادلته المتجهه ر = (−٧ ، ٥) + ك (−٢ ، ٣)

الحـــــــــل

∵ ر = (−٧ ، ٥) + ك (−٢ ، ٣)

∴ المستقيم يمر بالنقطة (−٧ ، ٥) ، وميله م = $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{-٣}{٢}$

المعادلة $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م ∴ $\frac{ص - ٥}{س + ٧}$ = $\frac{-٣}{٢}$

∴ المعادلة هى : − ٣ س − ٢١ = ٢ ص − ١٠ ٣ س + ٢ ص + ١١ = ٠

مثـــ٨ـــال : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (−٢ ، ٣)

ويوازى المستقيم ٤ س − ٧ ص +٣ = ٠

الحـــــــــل

∵ المستقيمان متوازان ∴ $م_١$ = $م_٢$ م الموازى = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{٤}{٧}$ م المطلوب = $\frac{٤}{٧}$

المعادلة $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م ∴ $\frac{ص - ٣}{س + ٢}$ = $\frac{٤}{٧}$

∴ ٤ س + ٨ = ٧ ص − ٢١ ∴ ٤ س − ٧ص +٢٩ = ٠

مثـــ٩ـــال : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤)

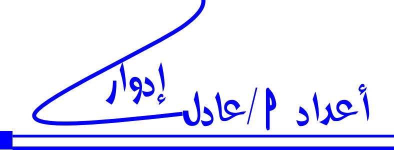
ويكون عمودى على المستقيم ٥ س + ٧ ص = ١

الحـــــــــل

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $م_١$ × $م_٢$ = − ١ م العمودى = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٥}{٧}$

∴ م المطلوب = $\frac{٧}{٥}$ المعادلة $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م ∴ $\frac{ص - ٤}{س - ٣}$ = $\frac{٧}{٥}$

∴ ٧س − ٢١ = ٥ ص − ٢٠ ٧س − ٥ص − ١ = ٠



مثـــ١٠ـــال : أوجد المعادلة الوسيطية للمستقيم المار بالنقطة (١ ، –٤) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٤ ، ٥)

الحـــــــــــل

∵ المستقيمان متوازان ∴ $م_١ = م_٢$ $\frac{٢}{٣}$ $م_{الموازى} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٣}{٤ - ١} = \frac{٢}{٣}$

∵ المستقيم مار بالنقطة (١ ، – ٤) ، وميله م = $م_{المطلوب} = \frac{ب}{ا} = \frac{٢}{٣}$

∴ المعاتلتين الوسيطيتين : $س = س_١ + ك ا$ ،،، $ص = ص_١ + ك ب$

$س = ١ + ٣ ك$ ،،، $ص = – ٤ + ٢ ك$

مثـــ١١ـــال : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (–٢ ، –٤) وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين (–١ ، ٢) ، (٣ ، ٥)

الحـــــــــــل

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $م_١ × م_٢ = – ١$ $م_{العمودى} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٢}{٣ + ١} = \frac{٣}{٤}$

∴ $م_{المطلوب} = \frac{-٤}{٣}$ المعادلة $م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ ∴ $\frac{ص + ٤}{س + ٢} = \frac{-٤}{٣}$

∴ ٣ ص + ١٢ = – ٤ س – ٨   ٣ ص +٤ س + ٢٠ = ٠

مثـــ١٢ـــال : أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع ٣ وحدات من الجزء الموجب لمحور السينات ، ٤ وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات

الحـــــــــــل

∵ معادلة الخط المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (ا ، ٠) ، و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب) هى : $\frac{س}{ا} + \frac{ص}{ب} = ١$

∴ $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{-٤} = ١$ بالضرب×١٢   ٤ س – ٣ ص = ١٢

مثـــ١٣ـــال : أوجد المقطوعتين السينية والصادية للمستقيم ٢ س – ٥ ص = ١٠

الحـــــــل

لايجاد المقطوعة السينية نضع ص = ٠ ⟸ ٢ س = ١٠ س = ٥

المقطوعة السينية = ٥ النقطة (٥ ، ٠)

لايجاد المقطوعة الصادية نضع س = ٠ ⟸ – ٥ ص = ١٠ ص = –٢

المقطوعة الصادية = ٢ النقطة (٠ ، – ٢)

مثـــ١٤ـــال : إذا كانت النقطة (٣ ، ﺃ) تنتمى للمستقيم ٢ س + ٥ ص – ١٧ = ٠ أوجد قيمة ﺃ

الحـــــــل

بالتعويض فى المعادلة ٢ﺃ + ٥ (٣) – ١٧ = ٠ ٢ ﺃ +١٥ – ١٧ = ٠

٢ ﺃ – ٢ = ٠ ٢ ﺃ = ٢ ∴ ﺃ = ١

مثـــ١٥ـــال : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى محور السينات

الحـــــــل

ميل المستقيم // محور السينات ∴ ميل المستقيم م = صفر ∴ ص = ص$_1$ = ٣

مثـــ١٦ـــال : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى محور الصادات

الحـــــــل

ميل المستقيم // محور الصادات ∴ ميل المستقيم م = $\frac{١}{٠}$ ∴ س = س$_1$ = ٢

مثـــ١٧ـــال : أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع المستقيم ٣س – ٢ ص + ١١ = ٠

على التعامد عندما : س = ١

الحـــــــل

عندما : س = ١ ٣ – ٢ ص + ١١ = ٠

– ٢ ص + ١٤ = ٠ – ٢ ص = – ١٤ ص = ٧

م$_{المستقيم}$ = $\frac{- معامل\ س}{معامل\ ص}$ = $\frac{-٣}{-٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ ∴ م$_{العمودى}$ = $\frac{-٢}{٣}$

المستقيم المطلوب يمر بالنقطة (١ ، ٧) وميله = $\frac{-٢}{٣}$

م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ ∴ $\frac{ص - ٧}{س - ١}$ = $\frac{-٢}{٣}$

∴ ٣ ص – ٢١ = –٢س+٢ ٣ ص + ٢ س – ٢٣ = ٠

مثـــ١٨ـــال : إذا كان ﻫ = (–٣ ، ١) ، ب = (٥ ، ٧) أوجد محور تماثل $\overline{ﻫ ب}$

الحــــــــل

محور القطعة هو المستقيم العمودى على ﻫ ب من منتصفها

منتصف $\overline{ﻫ ب}$ = ($\frac{-٣ + ٥}{٢}$ ، $\frac{١ + ٧}{٢}$) = (١ ، ٤)

ميل $\overline{ﻫ ب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٧ - ١}{٥+٣}$ = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

محور التماثل يمر بالنقطة (١ ، ٤) وميله$_{عمودى}$ = $\frac{-٤}{٣}$

م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ ∴ $\frac{ص - ٤}{س - ١}$ = $\frac{-٤}{٣}$

٣ ص – ١٢ = – ٤س +٤ ٣ص + ٤ س – ٨ = ٠

مثـ١٩ـال : إذا كان $\overline{ﻫ ب}$ قطر فى الدائرة م حيث ﻫ = (–٤ ، ١) ، ب = (–٢ ، ٤)
أوجد معادلة المماس للدائرة م عند ﻫ

الحــــــــل

المماس لدائرة يكون عمودياً على القطر المرسوم من نقطة التماس (ﻫ)

ميل $\overline{ﻫ ب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٤ - ١}{-٢+٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

∵ المماس عمودى على نصف القطر ميل المماس = $\frac{-٢}{٣}$

المماس يمر بالنقطة (–٤ ، ١) وميله = $\frac{-٢}{٣}$

$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = م$ ∴ $\frac{ص - 1}{س + 4} = \frac{-2}{3}$

۳ص – ۳ = –۲ س – ۸ ، ۳ص + ۲ س + ٥ = ۰

مثـــ۲۰ـــال : إذا كان ﺃ جـ قطر فى المربع ﺃ ب جـ ء حيث ﺃ = (٣ ، ٥) ، جـ = (–١ ، –١)

أوجد معادلة القطر ب ء

الحـــــــــــل

القطر $\overline{ب ء}$ يمر بمنتصف القطر $\overline{ﺃ جـ}$ وعمودى عليه

∴منتصف $\overline{ﺃ جـ}$ = ($\frac{3+(-1)}{2}$ ، $\frac{5+(-1)}{2}$) = (١ ، ٢)

ميل $\overline{ﺃ جـ}$ = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = $\frac{-1 - 5}{-1 - 3}$ = $\frac{-6}{-4}$ = $\frac{3}{2}$ ∴ ميل$_{العمودى}$ $\overline{ب ء}$ = $\frac{-2}{3}$

القطر ب ء يمر بالنقطة (١ ، ٢) وميله = $\frac{-2}{3}$

∴ معادلة $\overline{ب ء}$ $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = م$ ∴ $\frac{ص - 2}{س - 1} = \frac{-2}{3}$

۳ص – ٦ = –۲ س +۲ ، ۳ص +۲س – ۸ = ۰

تدريب (١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى المستقيم : س + ٣ ص – ٥ = ٠

الحـــــــل

ميل المستقيم : س + ٣ ص – ٥ = ٠ هو: $م_1$ =

∵ المستقيمان متوازيان

∴ ميل المستقيم المطلوب هو: $م_2$ =

∵ معادلة المستقيم هى : $\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = م$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى :



تدريب (٢) : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٥) ويكون عمودياً على المستقيم : ٥ س – ٤ ص + ٦ = ٠

الحـــل

ميل المستقيم : ٥ س – ٤ ص + ٦ = ٠ هو : $م_١$ =

∵ المستقيمان متعامدان

∴ ميل المستقيم المطلوب هو : $م_٢$ =

∵ معادلة المستقيم هى : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى :

تدريب (٣) : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، – ٥) ويصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥° ثم بين هل النقطة (٢ ، – ٣) تقع عليه أم لا ؟

الحـــل

ميل المستقيم = ظا ١٣٥° =

∵ معادلة المستقيم هى : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى :

لإثبات أن : هل النقطة (٢ ، – ٣) تقع على هذا المستقيم أم لا

نضع : س = ، ص =

∴ فى معادلة المستقيم

∴ (٢ ، – ٣) على هذا المستقيم

تمارين على معادلات المستقيم

[١] أوجد معادلات المستقـيم المار بالنقطة (١ , ٣) ومتجه إتجاهه (٢ , ٣)

[٢] أوجد معادلات المستقيم المار بالنقطة (ـ٥ , ١) ومتجه إتجاهه (٠ , ٤)

[٣] أوجدالمعادلة المتجه للمستقيم المار بالنقطـتين (٢ , ـ١) , (٣ , ١)

[٤] أوجد المعادله ألإحداثيه للمستقيم المار بالنقطـتين (٣ , ٥) , (٠ , ٧)

[٥] أوجد المعادله العامه للمستقيم المار بالنقطه (٢ , ٠) وميلـه = $\frac{١}{٤}$

[٦] أوجـد معادلـــه المستقيـم المار بالنقطـه (٢ , ـ٣) وميله =$\frac{٢}{٥}$

[٧] أوجــد معادلـــة المستقيـم المار بالنقطـة (١ ,ـ٢) وعمودى على المتجـــه (ـ٣ , ٤)

[٨] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٥ , ١) وعمودى على المستقيم الذى ميلـه = $\frac{١}{٢}$

[٩] أوجـد معادلـــة المستقيــــم المار بنقطـــة الأصـــل وميلـة $\frac{٢}{٣}$ـ

[١٠] أ وجدالمعادلة الوســيطيتين للمســتقيم الما ر بنقطة تقاطع المســــــتقيما ن

س ــ ص = ٢ ، ٢س + ص = ١٠ ويوازى المستقيم الذى ميله = ٣

[١١] أ وجد معادلةالمستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمان س + ص =٥ ، ٢س ـ ص = ١

وعمودى على المستقيم الذى ميله = $\frac{٥}{٢}$ـ

[١٢] أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٠ , ١) ويوازى المستقيم ٢س + ٣ص ــ ٣ = ٠

[١٣] أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (١ ،- ١) وعمودى على المستقيم ص = ٤س ــ٧

[١٤] أوجـد الصورة العامة للمستقيم المار بالنقطة (٤ , ـ ٦) وميله $\frac{٣}{٢}$ـ

وإثبت أنه يمر بنقطة الأصـــل

[١٥] أوجـد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ , ٢) وميلــه = $\frac{١}{٤}$

وإذا كان يمر بالنقطتين (م , ٣) ، (٤ , ب) فأوجـد قيمة أ , ب

[١٦] أ وجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٠ , ٢) ويصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥°

مع الإتجاه الموجب لمحور السينات ثم عين نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور الصـادات

[١٧] أوجـد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطـة (٥ , ـ ٦) ويصنع مع الإتجاه

الموجب لمحور الســينات زاويه قياســها ١٣٥°

[١٨] أوجد معادلةالمستقيم الذى ينصف م ب وعمودى عليه : أ = (١ , ٢) ،ب = (ـ٥ , ٤)

[١٩] أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقة التى تقسم أ ب بنسبه ٢:١ ويكون عموديا على

المستقيم ر = (٠ , ٢) + ك (٤ , ٥) حيث أن م = (٣ , ٤) ، ب = (ــ٣ , ــ ٥)

[٢٠] أوجـد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين س + ٢ص =٧

، ٢س + ص = ٨ ويوازى المستقيم الذى معادلتة س + ص = ٥

[٢١] أوجد معادلة المستقيم الإحداثيه الذى معادلته ر = (٥, ١) + ك (٣,٢)

[٢٢] أوجد معادلة المستقيم الذى معادلتية س= ٣ + ٢ك ، ص = ـ١ ـ ٢ك

[٢٣] أوجد المعادلة المتجه للمستقيم الذى معادلته العامة ٢ س + ٥ ص = ١٠

[٢٤] أوجد المعادلتين الوسيطيتين للمستقيم الذى معادلته س ـ ٢ ص = ـ٢

[٢٥] اوجد معادلات المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (١, ٥)

[٢٦] أوجد معادلات المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (٦, ٧)

[٢٧] أوجد معادلة المستقيم الموازى لمحور للمستقيم : ٣ س – ٤ ص + ٧ = ٠ ويقطع جزءاً من محور الصادات مقداره ٦ وحدات

[٢٨] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، – ٣) ويصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° ثم بين هل النقطة (٢ ، – ٥) تقع عليه أم لا ؟

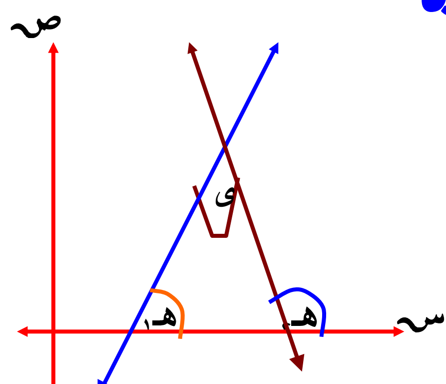
[٢٩] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (– ٥ ، ٤) ، وبنقطة الأصل

[٣٠] أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزأين طوليهما ٣ ، ٤ على الترتيب

[٣١] إذا كانت ٢ (٥ ، – ٦) ، ب (٣ ، ٧) ، حـ (١ ، – ٣) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بنقطة ٢ وينصف بحـ



الزاوية الحادة بين مستقيمين



المستقيمان اللذان ميلاهما : $م_١$ ، $م_٢$ ويحصران بينهما

زاوية قياسها ى فإن : ى تتعين من العلاقة

$$طا ى = \left| \frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢} \right|$$

حيث : $م_١$ = طا $هـ_١$ ، $م_٢$ = طا $هـ_٢$

ملاحظات :

(١) إذا كان : $م_١ = م_٢$ أى مستقيمان متوازيان فإن : طا ى = ٠ وتكون : ى = ٠° أو ١٨٠°

(٢) إذا كان : $م_١ \times م_٢ = -١$ أى مستقيمان متعامدان فإن : ى = ٩٠°

مثـــال ١ : أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين ٣ س – ص = ٥ ، ٢ س + ص – ٧ = ٠

الحـــل

∵ $م_١ = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{-١} = ٣$ ، $م_٢ = \frac{-٢}{١} = -٢$

$$ظاهـ = \left| \frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢} \right| = \left| \frac{٣ - (-٢)}{١ + ٣ \times -٢} \right| = \left| \frac{٥}{-٥} \right| = ١$$

ق (∠ هـ) = ٤٥°

مثـــال ٢ : إذا كانت أ = (١ ، ٤) ، ب = (٢ ، ١) ، جـ = (٤ ، ٢) أوجد ق (∠ ب أ جـ) المنفرجة

الحـــل

$م_١ = م_{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ١}{١ - ٢} = -٣$ ، $م_٢ = م_{أجـ} = \frac{٤ - ٢}{١ - ٤} = \frac{٢}{-٣} = \frac{-٢}{٣}$

$$ظاهـ = \left| \frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢} \right| = \left| \frac{-٣ - (-\frac{٢}{٣})}{١ + (-\frac{٢}{٣}) \times -٣} \right| = \left| \frac{-٩ + ٢}{٣ + ٦} \right| = \frac{٧}{٩}$$

∴ ق (∠ ب أ جـ) الحادة = ٣٧° ٥٣′ ∴ ق (∠ ب أ جـ) المنفرجة = ١٤٢° ٧′



مثـ٣ـال : أوجد قياس الزاوية بين المستقيم الذى معادلته ٣س – ٢ ص +١ = ٠
والمستقيم الذى متجهه أتجاهه (٥ ، ١)

الحـــــل

$$\text{م}_1 = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢} \qquad , \qquad \text{م}_2 = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{١}{٥}$$

$$\text{ظاهـ} = \left| \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{١ + \text{م}_1 \text{م}_2} \right| = \left| \frac{\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٥}}{١ + \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٥}} \right| = \left| \frac{١٥ - ٢}{١٠ + ٣} \right| = \frac{١٣}{١٣} = ١$$

∴ ظاهـ = ١ ∴ ق(∠ هـ) = ٤٥°

مثـ٤ـال : إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين تساوى ٤٥° فإذا علم أن ميل الاول = ٢
أوجد ميل الثانى

الحـــــل

نفرض أن ميل الثانى = م ، هـ = ٤٥° ∴ ظا هـ = ١

$$∴ \text{ظاهـ} = \left| \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{١ + \text{م}_1 \text{م}_2} \right| = \left| \frac{٢ - \text{م}}{١ + ٢ \times \text{م}} \right| = \left| \frac{٢ - \text{م}}{١ + ٢\text{م}} \right| = ١$$

∴ ١ + ٢ م = ٢ – م ∴ ٢م + م = ٢ – ١ ∴ ٣م = ١ ∴ م = $\frac{١}{٣}$

مثـ٥ـال : إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين س – ك ص +٢ = ٠ ، س – ٣ ص +٤ = ٠
تساوى ٤٥° أوجد قيمة (ك)

الحـــــل

$$\text{م}_1 = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{-\text{ك}} = \frac{١}{\text{ك}} \qquad \text{م}_2 = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$$

∵ هـ = ٤٥ ∴ ظاهـ = ١ ∴ = ١

$$\text{ظاهـ} = \left| \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{١ + \text{م}_1 \text{م}_2} \right| = \left| \frac{١ \backslash \text{ك} - (\frac{١}{٣})}{١ + (١ \backslash \text{ك}) \times (\frac{١}{٣})} \right| = \left| \frac{٣ - \text{ك}}{٣\text{ك} + ١} \right| = \; = ١$$

٣ ك +١ = ٣ – ك ∴ ٣ ك + ك = ٣ – ١ ∴ ٤ ك = ٢ ∴ ك = ٢

تمارين على الزاوية الحادة بين مستقيمين

(١) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$: ٢ س – ٣ ص = ٥ ، $ل_٢$: ٣ س + ص + ٦ = ٠

(٢)أوجد قياس الزاوية بين المستقيم الذى معادلته ٣ س – ٥ ص = ١ ، المستقيم الذى ميله = ٤

(٣) أوجد قياس الزاوية بين المستقيم الذى معادلته س + ٣ ص + ٢ = ٠

و المستقيم (س ، ص) = (٣ ، ٢) + ك (١ ، ٢)

(٤) إذا كان $ل_١$ مستقيم يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

، $ل_٢$ مستقيم ميله يساوى ٥　أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$

(٥) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : س – ك ص = ٨ ، ٢ س – ص = ٥

يساوى ٤٥°　أوجد قيمة ك

(٦) أوجــد قياس الزاوية بين المستقيمان $ل_١$, $ل_٢$ حيث أن

$ل_١$: ٤ س + ٣ ص = ٢ ، $ل_٢$: ر = (٢ , ٣) + ك (١ , ٤)

(٧) أوجــد قياس الزاوية بين المستقيمان $ل_١$, $ل_٢$ حيث أن

$ل_١$: س=٢ + ك , ص = ١ + ك ، $ل_٢$: ميلــه = $\frac{-٣}{٢}$

(٨) أوجــد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ , ٢) ويصنع مع الخط المستقيم

س ــ ٢ ص ــ = ٤　زاوية ظلـــها $\frac{٤}{٣}$

(٩) أوجــد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ , ٥) ويصنع مع الخط المســتقيم

ر = (٣ , ٢) + ك (٢ , ــ ٣) زاوية ظلها $\frac{٣}{٢}$

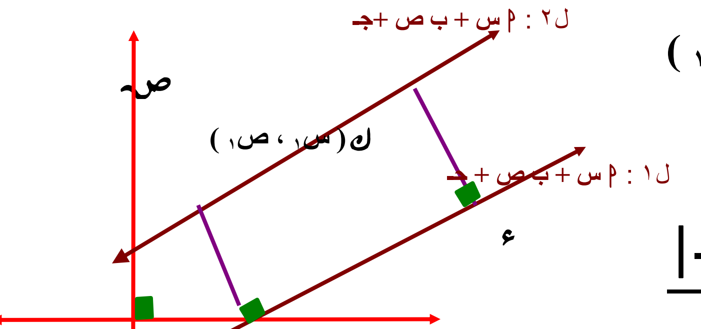
طول العمود من نقطة إلى خط مستقيم

طول العمود النازل من النقطة : ك (س١ ، ص١)

على المستقيم : ٢ س + ب ص + حـ = ٠

يعطى من العلاقة :

$$ل = \frac{|٢ س_١ + ب ص_١ + حـ|}{\sqrt{٢^٢ + ب^٢}}$$



ملاحظات :

(١) الرمز | ع | يعنى أن قيمة ع بدون إشارة

فمثلاً : | ٣ | = ٣ ، | – ٣ | = ٣

(٢) إذا كان : | س | = ٥ فإن : س = ٥ أ؛ س = – ٥

(٣) إذا كان : المقدار ٢ س١ + ب ص١ + حـ لنقطتين مختلفتين له نفس الإشارة

فإن : النقطتان تقعان على جانب واحد من المستقيم ٢ س + ب ص + حـ = ٠

أما إذا كان له إشارتين مختلفتين فإن النقطتان تقعان على جانبين مختلفين من المستقيم

(٤) إذا كان : المقدار ٢ س١ + ب ص١ + حـ لنقطة ما يساوى صفر

فإن : النقطة تقع على المستقيم ٢ س + ب ص + حـ = ٠

مثـــال ١ : أوجد طول العمود الساقط من النقطة (– ٢ ، ٥) على المستقيم ٣ س + ٤ ص + ٦ = ٠

الحـــــل

$$\because \text{طول العمود} = \frac{|٢ س_١ + ب ص_١ + حـ|}{\sqrt{٢^٢ + ب^٢}} = \frac{|٣ \times -٢ + ٤ \times ٥ + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$$

$$\therefore \text{طول العمود} = \frac{|-٦ + ٢٠ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤ \text{ وحدة طول}$$

مثـ٢ـال : أوجد طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ٣) على المستقيم ٤ س – ٣ ص – ١٤ = ٠

الحـــــل

$\because$ طول العمود = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + حـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} = \frac{|٤ \times ٢ - ٣ \times ٣ - ١٤|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

$\therefore$ طول العمود = $\frac{|٨ - ٩ - ١٤|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١٥}{٥} = ٣$ وحدة طول

مثـ٣ـال :أوجد طول العمود النازل من النقطة (٢ ، –٣) على المستقيم ٨ س – ٦ ص + ١٣ = ٠

الحـــــل

$\because$ طول العمود = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + حـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} = \frac{|٨ \times ٢ - ٦ \times -٣ + ١٣|}{\sqrt{٦٤ + ٣٦}}$

$\therefore$ طول العمود = $\frac{|١٦ + ١٨ + ١٣|}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{٤٧}{١٠} = ٤,٧$ وحدة طول

مثـ٤ـال : أوجد طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ١) على

المستقيم : ر = (٤ ، ٢) + ك (–٣ ، ٤)

الحـــــل

المعادلة العامة للمستقيم : المار بالنقطة (٤ ، ٢) وميله م = $\frac{ب}{أ} = \frac{-٤}{٣}$

$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$　　$\frac{ص - ٢}{س - ٤} = \frac{-٤}{٣}$

٣ ص – ٦ = – ٤ س + ١٦　　المعادلة ٤س + ٣ص – ٢٢ =٠　والنقطة (٢ ، ١)

$\because$ طول العمود = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + حـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} = \frac{|٤ \times ٢ + ٣ \times ١ - ٢٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

$\therefore$ طول العمود = $\frac{|٨ + ٣ - ٢٢|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢$ وحدة طول

مثـ٥ـال : إثبت أن المستقيمان $ل_١$: ٣ س + ٤ ص – ٨ = ٠

، $ل_٢$: ر = (٥ ، – ٣) + ك (٨ ، – ٦) متوازيان واوجد البعد بينهما

الحـــــل

ميل المستقيم الأول $م_١$ = $\frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٣}{٤}$ ، ميل الثانى $م_٢$ = $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{-٦}{٨}$ = $\frac{-٣}{٤}$

∵ $م_١$ = $م_٢$ ∴ المستقيمان

لإيجاد البعد بينهما نفرض نقطة على أحداها ونسقط عمود على الآخر

معادلة المستقيم ٣ س + ٤ ص – ٨ = ٠ والنقطة ∋ $ل_٢$ (٥ ، – ٣)

∵ طول العمود = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ = $\frac{|٣ × ٥ + ٤ × -٣ - ٨|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

∴ طول العمود = $\frac{|١٥ - ١٢ - ٨|}{\sqrt{٢٥}}$ = $\frac{٥}{٥}$ = ١ وحدة طول

مثـ٦ـال : إذا كان طول العمود النازل من نقطة الاصل على المستقيم ٤ س – ٣ ص + ك = ٠

يساوى ٣ وحدات أوجد قيمة ك

الحـــــل

∵ طول العمود = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ = $\frac{|٤ × ٠ - ٣ × ٠ + ك|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

∴ طول العمود = $\frac{|ك|}{\sqrt{٢٥}}$ = ٣ ⟸ | ك | = ١٥ ∴ ك = ± ١٥

مثـ٧ـال :أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (١ ، –٣) والمستقيم

١٢س – ٥ ص –١ = ٠ مماس لها واوجد محيطها ومساحتها

الحـــــل

نصف قطر الدائرة هو البعد العمودى من مركز الدائرة الى مماس الدائرة

المستقيم ١٢س – ٥ ص –١ = ٠		النقطة (١ ، –٣)

∵ طول العمود = نق = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + حـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ = $\frac{|١٢ × ١ – ٥ × –٣ –١|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}}$

∴ طول العمود = $\frac{|١٢ +١٥ – ١|}{\sqrt{١٦٩}}$ = $\frac{٢٦}{١٣}$ = ٢ وحدة طول

محيطها = ٢ ط نق = ٢ ط × ٢ = ٤ ط

مساحتها = ط نق^٢ = ط × (٢)^٢ = ٤ ط

مثـ٨ـال : إثبت أن المستقيمان ٣ س – ٤ ص – ٦ = ٠ ، ٦ س – ٨ ص + ١ = ٠ متوازيان واوجد البعد بينهما

الحـــــــل

م$_١$ = $\frac{-٣}{-٤}$ = $\frac{٣}{٤}$ ، م$_٢$ = $\frac{-٦}{-٨}$ = $\frac{٣}{٤}$ م$_١$ = م$_٢$ المستقيمان متوازيان

لايجاد البعد بينهما نوجد نقطة على أحدهما ثم نوجد البعد بينها وبين المستقيم الاخر

فى المستقيم الاول نضع ص = ٠ نجد ان ٣ س – ٦ = ٠ ٣س = ٦ س = ٢

النقطة (٢ ، ٠) تنتمى للمستقيم الاول نوجد البعد بينها وبين المستقيم الثانى

معادلة المستقيم ل$_٢$: ٦ س – ٨ص + ١ = ٠ والنقطة (٢ ، ٠) ∈ ل$_١$

∵ طول العمود = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + حـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ = $\frac{|٦× ٢ – ٨× ٠ + ١|}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}}$

∴ طول العمود = $\frac{|١٢ +٠ + ١|}{\sqrt{١٠٠}}$ = $\frac{١٣}{١٠}$ = ١,٣ وحدة طول

مثـ٩ـال : إثبت أن المستقيم الذى معادلته ٤ س + ٣ ص + ٢ = ٠ يمس الدائرة التى مركزها (٣ ، ٢) وطول نصف قطرها ٤ سم

الحـــــــل

نوجد طول العمود النازل من المركز (٣ ، ٢) على المستقيم ٤ س + ٣ ص +٢ = ٠

∵ طول العمود = $\frac{|ا س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{ا^٢ + ب^٢}} = \frac{|٤ × ٣ + ٣ × ٢ + ٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

∴ طول العمود = $\frac{|١٢ + ٦ + ٢|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$ وحدة طول

∵ ع = نق = ٤　　∴ المستقيم يمس الدائرة

مثــ١٠ــال : إثبت أن النقطتين ا(٣ ، ١) ، ب = (-٣ ، ٢) تقعان على جانبين مختلفتين من المستقيم ٣ س - ٤ ص +٦ = ٠ وعلى بعدين متساويين منه

الحــــــل

نوجد طول العمود الساقط من ا (٣ ، ١) على المستقيم ٣ س - ٤ ص +٦ = ٠

$ع_١ = \frac{|ا س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{ا^٢ + ب^٢}} = \frac{|٩ - ٤ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١١}{٥}$ وحدة طول

نوجد طول العمود الساقط من ب (-٣ ، ٢) على المستقيم ٣ س - ٤ ص +٦ = ٠

$ع_١ = \frac{|ا س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{ا^٢ + ب^٢}} = \frac{|-٩ - ٨ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{|-١١|}{٥} = \frac{١١}{٥}$ وحدة طول

المقدار ٣س - ٤ ص +٦ له أشارتين مختلفتين ١١ ، -١١ عند التعويض بالنقطتين

∴ النقطتان فى جهتين مختلفتين من المستقيم وعلى بعدين متساويين منه

مثــ١١ــال :أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = $\frac{-٥}{١٢}$ وطول العمود الساقط عليه من النقطة (٢ ، -١) يساوى ٢ وحدة طول .

الحــــــل

نفرض أن المستقيم ٥ س + ١٢ ص + جـ = ٠　　طول العمود ع = ٢

∵ طول العمود = $\frac{|ا س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{ا^٢ + ب^٢}} = \frac{|٥ × ٢ + ١٢ × -١ + جـ|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}}$

∴ طول العمود = $\frac{|١٠ - ١٢ + جـ|}{\sqrt{١٦٩}}$ = $\frac{|-٢ + جـ|}{١٣}$ = ٢ وحدة طول

جـ − ٢ = ٢٦   أ، جـ − ٢ = −٢٦

جـ = ٢٦+٢ = ٢٨   أ، جـ = −٢٦+٢ = −٢٤

معادلة المستقيم ٥س + ١٢ ص +٢٨ = ٠   أ، ٥س +١٢ ص − ٢٤ = ٠

تدريب: أثبت أن المستقيمان $ل_١$: ٣ س + ٤ ص = ٣ ، $ل_٢$: الذى يمر بالنقطتين (١ ، − ٢) (−٣ ، ١) متوازيان ، و أوجد البعد بينهما

الحـــــل

ميل $ل_١$ =   ، ميل $ل_٢$ =   ، ∵   ∴ المستقيمان

البعد بينهما = طول العمود المرسوم من النقطة (−٣ ، ١) على المستقيم ٣ س + ٤ ص − ٣ = ٠

=   =   =

=   وحدة طول

تمارين على طول العمود

(١) أوجد طول العمود الساقط من النقطة (٢ ، ١) على المستقيم ٤ س − ٣ ص + ٥ = ٠

(٢) أوجد طول العمود الساقط من النقطة (٣ ، ٢) على المستقيم ٤ س + ٥ = ٠

(٣) أوجد طول العمود من النقطة (−٢ , ٥) على المستقيم المار بالنقطة (١ , ٢) وتجه إتجاه (−٤ , ٣)

(٤) أوجد بعد النقطة (١ ، ٥) عن المستقيم الواصل بين النقطتين (٥ ، −٣) ، (١ ، ٠)

(٥) أوجد بعد النقطة التى تقع فى منتصف المسافة بين النقطتين (٣ ، ٢) ، (−٤ ، ٦) عن المستقيم ٢ س − ٣ ص + ٥ = ٠

(٦) أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها النقطة (٣ ، – ١) وتمس المستقيم الذى معادلته ٤ س + ٣ ص + ٦ = ٠ ثم أحسب مساحة سطح الدائرة

(٧) أثبت أن المستقيمان $ل_1$: ٣ س + ٤ ص = ٧ ، $ل_2$: ٦ س + ٨ ص + ٦ = ٠ متوازيان ثم أوجد البعد بينهما

(٨) إستخدم طول العمود وأثبت أن (٢,١) , (١,٢) , (٣,٠) على إستقامة واحدة

(٩) أوجد نقطة على محور السينات بحيث يكون بعدها عن المستقيم ٣ س – ٤ ص – ٦ = ٠ مساوياً ٢ وحدة طول

(١٠) أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها النقطة (٤ , ـ ١) وتمس المستقيم الذى معادلتة ر = (١ , ١) + ك (١٢ , ٥)

(١١) أوجد نقطة على محور الصادات بحيث يكون بعدها عن المستقيم ١٢ س + ٥ ص + ٩ = ٠ مساوياً ٣ وحدة طول

(١٢) أوجد بعد النقطة (١ ، – ٢) عن المستقيم المار بالنقطة (٢ ، – ٣) والذى يصنع زوايا متساوية مع كل من محورى الإحداثيات

(١٣) هل النقطتان (١ ، ٤) ، (– ٢ ، ٣) تقعان على نفس الجانب من المستقيم ٢ س – ص = ٣ أم على جانبين مختلفين ؟

(١٤) Δ أ ب حـ فيه أ (١ ، ١) ، ب (٥ ، ٢) ، حـ (٧ ، ٥) أوجد :

١ – معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ٢ – طول العمود المرسوم من أ على $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

٣ – طول $\overline{\text{ب جـ}}$ ٤ – مساحة سطح Δ أ ب حـ

(١٥) أ ثبت أن المستقيمان ر = (٢ , ٣) + ك (٢ , ١) ، ر = (٦ , ٥) + كَ (٦ , ٣) متوازيان وأوجد البعد بينهما

المعادلة العامة
للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين معلومين

إذا كان ل$_1$: أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$ = ٠ ، ل$_2$: أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$ = ٠

فإن : المعادلة التى تمثل المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطعهما هى :

أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$ + ك (أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$) = ٠

حيث ك عدد ثابت يمكن إيجاده إذا علم : نقطة واقعة على المستقيم المعلوم أو ميله أو ميل المستقيم الموازى له أو ميل المستقيم العمودى عليه أو ٠٠٠٠

مثـــال : أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٣ س + ٢ ص – ٧ = ٠ ، س + ٣ ص – ٧ = ٠ ، ومار بالنقطة (٣ ، ١)

الحـــــل

المعادلة المطلوبة هى : (٣ س + ٢ ص – ٧) + ك (س + ٣ ص – ٧) = ٠

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ١)

∴ (٣ × ٣ + ٢ × ١ – ٧) + ك (١ × ٣ + ٣ × ١ – ٧) = ٠

∴ ٤ – ك = ٠ ∴ ك = ٤ ، بالتعويض فى المعادلة المطلوبة :

∴ (٣ س + ٢ ص – ٧) + ٤ (س + ٣ ص – ٧) = ٠

∴ المعادلة المطلوبة هى : س + ٢ ص – ٥ = ٠

حل آخــــــر

بوضع : ٣ س + ٢ ص = ٧ (١)

، س + ٣ ص = ٧ (٢) بالضرب × ٣

∴ ٣ س + ٩ ص = ٢١

٣ س + ٢ ص = ٧ بالطرح

٧ ص = ١٤ ∴ ص = ٢

بالتعويض فى (١) ينتج : س = ١ ∴ المستقيم يمر بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٣ ، ١)

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{١ - ٢}{٣ - ١}$ = $\frac{-١}{٢}$

∴ المعادلة المطلوبة هى : ص − ١ = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٣)

أى : س + ٢ ص − ٥ = ٠

مثـ٢ـال : أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ل١ : ٢ س + ص = ١١

، ل٢: ر = (٧ ، ١) + ك (١ ، −١) ويوازى المستقيم ٤ س − ٧ ص + ١ = ٠

الحـــــل

ل٢ معادلته : (ص − ص١) = م (س − س١)

(ص − ١) = − ١ (س − ٧) ∴ س + ص = ٨

نوجد نقطة تقاطع المستقيمين ٢ س + ص = ١١ (١)

س + ص = ٨ (٢)

بطرح المعادلتين ∴ س = ٣

بالتعويض فى (٢) ⟸ ٣ + ص = ٨ ∴ ص = ٥

نقطة التقاطع (٣ ، ٥) م الموازى = $\frac{٤}{٧}$ م المطلوب = $\frac{٤}{٧}$

∴ المعادله المطلوبة : (ص − ص١) = م (س − س١)

(ص − ٥) = $\frac{٤}{٧}$ (س − ٣) نضرب × ٧

∴ ٧ ص − ٣٥ = ٤ س − ١٢ ∴ المعادلة المطلوبة هى : ٤ س − ٧ ص +٢٣ = ٠

مثـــ٣ـــال : أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين

٢ س + ص = ١١ ، س − ص = ١ وعمودى على المستقيم ٣ س − ٥ ص +١ = ٠

الحـــــل

نوجد نقطة تقاطع المستقيمين ٢ س + ص = ١١ (١) ،، س − ص = ١ (٢)

بجمع المعادلتين ∴ ٣س = ١٢ ∴ س = ٤

بالتعويض فى (١) ∴ ٨ + ص = ١١ ∴ ص = ٣

نقطة تقاطع المستقيمين (٤ ، ٣) ، مالعمودى = $\frac{٣}{٥}$ م المطلوب = $\frac{-٥}{٣}$

∴ المعادله المطلوبة : (ص – ص١) = م (س – س١)

(ص – ٣) = $\frac{-٥}{٣}$ (س – ٤) نضرب × ٣

∴ ٣ ص – ٩ = –٥ س +٢٠ ∴ المعادلة المطلوبة هى : ٣ س + ٥ ص –٢٩ = ٠

مثـــ٤ـــال : أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٢ س + ص = ٧ ، س + ٢ ص = ٨ وبالنقطة (٥ ، ٤)

الحـــــل

المعادلة المطلوبة هى : (٢ س + ص – ٧) + ك (س + ٢ ص – ٨) = ٠

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٥ ، ٤)

∴ (٢ × ٥ + ١ × ٤ – ٧) + ك (١ × ٥ + ٢ × ٤ – ٨) = ٠

∴ ٧ + ٥ ك = ٠ ∴ ك = $\frac{-٧}{٥}$ ، بالتعويض فى المعادلة المطلوبة :

∴ (٢ س + ص – ٧) + $\frac{-٧}{٥}$ (س + ٢ ص – ٨) = ٠ × ٥

١٠ س + ٥ ص – ٣٥ – ٧ س – ١٤ ص + ٥٦ = ٠

∴ ٣ س – ٩ ص + ٢١ = ٠ المعادلة المطلوبة هى : س – ٣ ص + ٧ = ٠

مثـــ٥ـــال : أوجد طول العمود النازل من نقطة تقاطع المستقيمين س+ص=٥ ، س – ص = ١ على المستقيم ٨س +٦ ص + ٥ = ٠

الحـــــل

نوجد أولا نقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٥ (١)

س – ص = ١ (٢)

بالجمع ٢ س = ٦ ∴ س = ٣ بالتعويض ∴ ص = ٢

نوجد طول العمود النازل من النقطة (٣ ، ٢) على المستقيم ٨س+٦ص+٥ = ٠

$\frac{|٨(٣)+٦(٢)+٥|}{\sqrt{٦٤+٣٦}} = \frac{|٢٤+١٢+٥|}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{٤١}{١٠}$ = ٤.١ وحدة طولية

تمارين على طول العمود

(١) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س + ٢ ص = ٥

، ٣ س + ٤ ص = ١١ و بالنقطة (٣ ، −١)

(٢) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٢

، ٣ س + ٥ ص = ٨ ويوازى المستقيم ٢ س − ص = ٤

(٣) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س − ٢ ص + ٥ = ٠

، ص = ٢ س + ١ وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (٣ ، ٠)

(٤) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س − ص = ٨

، س + ٢ ص − ٥ = ٠ ويوازى محور السينات

(٥) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ٣ ص = ٠

، ٣ س − ٢ ص = ٣ ويوازى محور الصادات

(٦) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ص = ٢

، ٤ س + ٣ ص − ٣ = ٠ ويمر بنقطة الأصل

(٧) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س − ٢ ص = ٢

، ٥ س + ٢ ص = ٣ وميله يساوى ٢

(٨) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :

س = ٣ ، ص = ٤

(٩) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س − ٧ ص + ٩ = ٠

، ٣ س + ٢ ص − ٤ = ٠ وعمودى على المستقيم الأول

(١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ٣ ص – ٢ = ٠ ، ٣ س – ص – ١٤ = ٠ والذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥°

(١١) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ص – ١ = ٠ ، س – ص + ٣ = ٠ ويقطع من محور الصادات السالب جزءاً طوله ٣ وحدات

(١٢) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س – ٤ ص + ١ = ٠ ، ٥ س + ص – ١ = ٠ ويقطع جزأين متساويين من المحورين الموجبين

(١٣) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س – ٣ ص + ٨ = ٠ ، ٣ س + ٢ ص – ١ = ٠ وميله موجب ويصنع مع محورى الإحداثيات مثلثاً مساحة سطحه تساوى ٤ وحدات مربعة

